

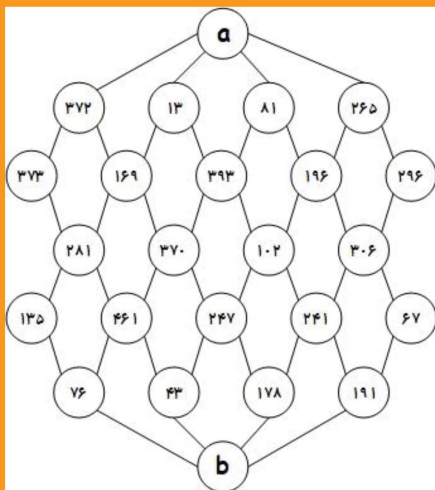
ریاضیات محاسبه‌ای

پرویز شهریاری

جلد اول

(سال اول دبیرستان - نیمسال اول)

نظام جدید آموزشی



قابل استفاده:

۱. دانش‌آموزان دوره دبیرستان (نظام جدید)؛
۲. همه کسانی که می‌خواهند ریاضیات را پیش خود یاد بگیرند؛
۳. همه داوطلبان کنکورهای و المپیادها.

ریاضیات محاسبه ای

(برای استفاده در نیم سال اول دبیرستان)

نظام جدید

پرویز شهریاری



منتشر شده است:

- ریاضیات محاسبه‌ای (جلد اول) - سال اول دبیرستان - نیم سال اول ۱۲۰۰ تومان
- ریاضیات محاسبه‌ای (جلد دوم) - سال اول دبیرستان - نیم سال دوم ۱۴۰۰ تومان
- ریاضیات محاسبه‌ای (جلد سوم) - سال دوم دبیرستان - نیم سال اول ۱۵۰۰ تومان
- ریاضیات محاسبه‌ای (جلد چهارم) - سال دوم دبیرستان - نیم سال دوم ۱۳۰۰ تومان
- ریاضیات محاسبه‌ای (جلد پنجم) - سال سوم دبیرستان - ریاضی فیزیک ۱۶۰۰ تومان
- مسأله‌های المپیاد آمریکا - با حل ۴۰۰ تومان
- مسأله‌های المپیاد شوروی - با حل ۱۲۰۰ تومان
- مسأله‌های المپیاد کشورهای مختلف - با حل ۱۶۰۰ تومان
- مهم‌ترین مسأله‌ها و قضیه‌های دشوار ریاضی ۱۵۰۰ تومان
- بازی‌ها - سرگرمی‌ها - معماها در ریاضیات ۱۲۰۰ تومان
- نظریه ساختمان‌های هندسی ۶۰۰ تومان
- نابرابری ۶۰۰ تومان
- هندسه تحلیلی و جبر خطی (مسأله با حل) ۱۲۰۰ تومان



خیابان دانشگاه - کوچهٔ میترا - شمارهٔ ۷ تلفن ۶۴۱۸۸۳۹ - ۶۴۶۹۹۶۵

ریاضیات محاسبه‌ای (جلد اول)

پرویز شهریاری

چاپ چهارم: تهران ۱۳۷۷

تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه

چاپ: چاپخانه رامین

همهٔ حقوق محفوظ است.

شابک ۳ - ۸۲ - ۵۵۰۹ - ۹۶۴ - 3 - 82 - 5509 - 964 ISBN

شابک دورهٔ ۴ جلدی ۳ - ۹۶ - ۵۵۰۹ - ۹۶۴

ISBN 964 - 5509 - 96 - 3 (4 Vol. Set)

۱۲۰۰ تومان

پیش‌گفتار

این کتاب‌ها که بر پایهٔ تازه‌ترین برنامهٔ ریاضی دبیرستان‌ها تنظیم شده‌اند و، کتاب حاضر، جلد اول از این رشته کتاب‌هاست، چند ویژگی دارند:

۱. تلاش شده است تا ردیف برنامه، در کتاب‌های درسی، رعایت شود تا دانش‌آموزان، ضمن استفاده از آن، دچار سرگردانی نشوند.

۲. کتاب به‌صورت خودآموز تهیه شده است تا بتواند مورد استفادهٔ همهٔ کسانی قرار گیرد که می‌خواهند مفهوم‌های ریاضی را با دقت فرا گیرند. به‌همین دلیل، از هیچ مطلبی، بدون دلیل یا شرح کافی رد نشده است.

۳. نویسندهٔ کتاب اعتقاد دارد که «تاریخ ریاضیات»، «فلسفهٔ ریاضیات» و «کاربردهای ریاضیات»، از خود ریاضیات جدا نیستند و هرچا لازم دیده است، گریزی به این بحث‌ها زده است.

۴. کتاب در سطحی بالاتر تنظیم شده است تا کسانی را هم که می‌خواهند، از همان آغاز، خود را برای مسابقه‌ها، کنکورهای و المپیادها آماده کنند، به‌کار آید. ولی بحث‌ها و مساله‌های دشوارتر، با نشانهٔ * مشخص شده‌اند، تا کسانی که تنها به برنامهٔ دبیرستانی و در سطح دبیرستانی علاقه‌مندند، بتوانند از پرداختن به آن‌ها صرف‌نظر کنند.

۵. بسیاری از روش‌ها و یا قانون‌ها، ضمن حل مساله‌ها شرح داده شده است و، بنابراین، اگر موفق به حل مساله‌ای شده‌اید، از مراجعه به راه‌حل کتاب خودداری نکنید تا هم راه‌حل خود را کنترل کنید و هم با روش‌های تازه آشنا شوید.

۶. کوشش شده است، مساله‌ها تازگی داشته باشد؛ در این کتاب، مساله‌های کتاب درسی (که بسیار ساده و در برخی موارد سطحی‌اند) و هم، مساله‌های کتاب‌های دیگر (ولو این‌که متعلق به نویسنده این کتاب باشد)، تا حد امکان نیامده است؛ باوجود این، تلاش شده است، خواننده با گونه‌های مختلف مساله‌ها و روش‌های مختلف حل مساله‌ها، آشنا شود.

۷. چه در مورد موضوع‌ها و مفهوم‌ها و چه در مورد حل مساله‌ها، چه بسا روش‌های ساده‌تری وجود داشته باشد و، به‌همین دلیل، از همه خوانندگان کتاب، برای رفع کمبودهای احتمالی آن، یاری می‌طلبم.

۸. جلد اول (کتاب حاضر)، برنامه نیم سال اول دبیرستان را دنبال کرده است و آرزوی من این است که بتوانم جلدهای بعدی کتاب را، تهیه و منتشر کنم.

بیست و پنجم فروردین یک هزار و سیصد و هفتاد و چهار

پرویز شهریاری

در این کتاب

پیش از آغاز	۹
۱. مجموعه‌ها	۱۵
ورود به مطلب	۱۵
مجموعه	۱۶
نماد عضو بودن و نماد عضو نبودن	۱۸
مجموعه معین	۱۹
مجموعه‌های باپایان و مجموعه‌ای بی‌پایان	۲۱
شکل دیگر نوشتن یک مجموعه	۲۳
مجموعه یکانی و مجموعه تهی	۲۴
نمایش هندسی مجموعه‌ها	۲۶
زیرمجموعه یا مجموعهک	۲۷
مجموعه مادر و مجموعه متمم	۳۲
اندکی بیشتر درباره مجموعه‌ها	۳۳
تمرین	۳۹
۲. عمل با مجموعه‌ها	۴۴

۴۴	اجتماع دو مجموعه
۵۲	اشتراک دو مجموعه
۶۰	تفاضل دو مجموعه
۶۵	تمرین

۷۱	۳. عددهای درست
۷۱	نگاهی به تاریخ
۷۵	مجموعه عددهای طبیعی
۷۸	بخش‌پذیری در مجموعه عددهای طبیعی
۸۲	بخش‌پذیری بر ۷ و ۱۳
۸۴	مجموعه عددهای درست
۸۶	کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد
۸۷	عدد اول
۸۸	عددهایی که بخش‌یاب مشترکی جز واحد ندارند
۸۸	تمرین

۹۳	۴. توان
۹۳	تکرار عمل ضرب، یعنی توان
۹۵	ردیف عمل‌ها
۹۶	عمل با توان‌ها
۱۰۰	تجزیه یک عدد مرکب، به صورت ضرب عامل‌های اول
۱۰۱	تمرین

۱۰۵	۵. مجموعه عددهای گویا
۱۰۵	نسبت دو عدد طبیعی

مفهوم کسر و ویژگی‌های آن	۱۰۶
کسره‌های دهدهی	۱۱۲
تبدیل کسره‌های دهدهی به کسره‌های متعارفی	۱۱۵
بخشی از یک عدد	۱۱۷
درصد	۱۱۸
محاسبه‌های تقریبی	۱۲۱
روش نوشتن عددهای تقریبی	۱۲۲
قانون گرد کردن عددها	۱۲۳
خطای مطلق و خطای نسبی	۱۲۵
تناسب	۱۲۸
کمیت‌های متناسب	۱۲۹
تمرین	۱۳۶
۶. مجموعه عددهای حقیقی	۱۴۵
اندکی تاریخ	۱۴۵
عددهای گنگ	۱۴۸
پیدا کردن پاره‌خط‌های راست با طولی برابر $\sqrt{n}$	۱۵۱
قدر مطلق	۱۵۳
تمرین	۱۵۵
۷. جمله و چندجمله‌ای	۱۵۸
ورود به مطلب	۱۵۸
جمله	۱۶۱
چندجمله‌ای	۱۶۴
تمرین	۱۶۶

۸. ضرب و تقسیم در چندجمله‌ای‌ها ۱۷۰
- ضرب یک‌جمله‌ای در چندجمله‌ای و
- تقسیم چندجمله‌ای بر یک‌جمله‌ای ۱۷۰
- ضرب و تقسیم دو چندجمله‌ای ۱۷۱
- کسر جبری ۱۷۶
- عبارت‌های گویا ۱۷۷
- اتحادهای جبری ۱۷۸
- اتحادها در طول تاریخ ۱۸۸
- چند یادآوری مهم ۱۹۱
- تمرین ۱۹۵
۹. تجزیه چندجمله‌ای‌ها ۲۰۰
- روش‌های تجزیه ۲۰۰
- بزرگترین بخش‌یاب مشترک و کوچکترین مضرب مشترک ۲۰۷
- تمرین ۲۱۱
- حل مساله‌ها ۲۱۶

پیش از آغاز

برای یادگیری زیست‌شناسی یا زیان، بیش از هرچیز به «حافظه» نیاز دارید، برای این‌که طرح یک ساختمان را روی صفحه کاغذ بیاورید، باید «دقت» و تصور فضایی خوبی داشته باشید، برای این‌که در مسابقه علمی رادیویی یا تلویزیونی موفق شوید، علاوه بر آگاهی، «سرعت عمل» و «سرعت تصمیم‌گیری» به شما یاری می‌رساند. . . . ولی در ریاضیات به همه این‌ها نیازمندید، به‌جز این‌ها، باید بتوانید بین آن‌چه در اختیار دارید (فرض) و آن‌چه لازم دارید (حکم) یک حلقه ارتباطی محکم برقرار کنید. درواقع، باید بتوانید بین آن‌چه به شما داده‌اند، و آن‌چه از شما خواسته‌اند، رابطه‌ای منطقی پیدا کنید.

چند مساله‌ای که در این‌جا داده شده‌است، همین هدف را دنبال می‌کند. هیچ‌کدام از این مساله‌ها، به ریاضیاتی بیشتر از آن‌چه می‌دانید، نیاز ندارد. حتی دانش‌آموزی هم که تازه دوره دبستان را تمام کرده‌است، می‌تواند آن‌ها را حل کند. برای پیدا کردن راه‌حل، باید بادقت و باحوصله، صورت مساله را بخوانید؛ اگر در صورت مساله دقت کنید، راه‌حل را هم پیدا خواهید کرد. بعد از آن‌که راه‌حلی برای مساله پیدا کردید، در پایان کتاب، راه‌حل ما را هم ببینید تا هم کار ما و هم کار شما مورد بازبینی قرار گیرد.

به‌طورکلی، به دانش‌آموزانی که به بالا بردن درک ریاضی خود علاقه‌مندند، توصیه می‌کنیم از مطالعه کتاب‌های مربوط به سرگرمی‌های ریاضی غفلت نکنند. وقت خود را با این کتاب‌ها بگذارید، چراکه بهترین راه برای درک بهتر مفهوم‌های ریاضی است.

مساله‌ها

۱. در زیر، در هر سطر شش عدد نوشته شده‌است و جای سه عدد

بعد از آن خالی است. هر سطر، برای خودش، یک مسأله مستقل است و به سطرهای دیگر بستگی ندارد، ولی عددهای هر سطر، از چپ به راست، طبق قانونی به دنبال هم آمده‌اند. برای هر سطر، این قانون را پیدا کنید و سه عدد بعدی را بنویسید:

۱)	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
۲)	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	...
۳)	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	...
۴)	۹	۱	۷	۱	۵	۱	...
۵)	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	...
۶)	۲۱	۱۸	۱۶	۱۳	۱۱	۸	...
۷)	۳۲	۱۶	۸	۴	۲	۱	...
۸)	۳	۴	۶	۹	۱۳	۱۸	...
۹)	۱۵	۱۶	۱۴	۱۷	۱۳	۱۸	...
۱۰)	۳	۶	۸	۱۶	۱۸	۳۶	...
۱۱)	۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	...
۱۲)	۳	۵	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	...

۲. (سرعت و دقت خود را آزمایش کنید). در این جا، چند جمع یا تفریق نوشته شده است که برخی درست و برخی نادرست‌اند. آیا می‌توانید، حداکثر در ۲ دقیقه، جمع‌ها و تفریق‌های اشتباه را پیدا کنید و نشانه بگذارید؟ اگر به بیش از ۲ دقیقه نیاز دارید، باید با تمرین، سرعت کار خود را بیفزایید.

$$\begin{array}{lll}
 ۳ + ۱۲ = ۱۵, & ۱۶ + ۴ = ۲۲, & ۱۵ - ۸ = ۷, \\
 ۱۳ + ۳ = ۱۰, & ۱۶ + ۸ = ۲۳, & ۱۳ - ۴ = ۹, \\
 ۱۶ - ۹ = ۷, & ۱۶ + ۹ = ۲۸, & ۱۳ - ۲ = ۱۱, \\
 ۱۲ - ۶ = ۶, & ۱۵ + ۹ = ۲۵, & ۱۵ - ۴ = ۱۱, \\
 ۱۵ - ۲ = ۱۳, & ۱۹ + ۵ = ۲۴, & ۱۲ - ۴ = ۱۶, \\
 ۱۵ + ۵ = ۱۰, & ۱۴ - ۹ = ۵, & ۱۲ - ۹ = ۳,
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 5 + 17 &= 22, & 7 + 18 &= 25, & 2 + 11 &= 13, \\
 4 + 18 &= 22, & 6 + 15 &= 22, & 18 - 8 &= 10, \\
 16 - 5 &= 11, & 12 - 7 &= 5, & 18 - 7 &= 11, \\
 7 + 7 &= 14, & 19 - 6 &= 13, & 5 + 13 &= 18, \\
 114 - 8 &= 6, & 16 + 6 &= 22, & 13 - 5 &= 8, \\
 18 - 4 &= 14, & 14 + 9 &= 23, & 16 - 2 &= 14, \\
 14 + 6 &= 20, & 11 + 4 &= 15, & 12 + 9 &= 21,
 \end{aligned}$$

۳. (بازهم آزمایش سرعت و دقت). در این جدول، همهٔ عددهای از ۱ تا ۵۱ نوشته شده‌است (که البته، به ترتیب نیستند). آیا می‌توانید آن‌ها را در کمتر از یک دقیقه‌ونیم، به ترتیب پیدا کنید و بخوانید؟ اگر موفق شوید، سرعت کار شما فوق‌العاده است.

۳۰		۴	۴۴	۱۳	۳۴	۱۱		۲۴	۸	۲۹
				۲۵		۳۶				
۴۱		۱۲		۴۷	۳۸	۵		۲	۱۵	۴۹
۶	۲۸	۳۲								
۲۱		۳۹		۲۷	۱۸	۵۰		۴۵		۲۳
										۷
۳۳		۱۰	۴۶	۱۶		۳۷	۲۰	۴۸	۳۱	۴۲
		۱۹				۳	۴۳			
۵۱		۱	۱۴	۴۰		۲۶		۳۵		۹
۲۲						۱۷				

۴. (جست‌وجو و دقت). این سه شکل را، بدون این‌که قلم را از کاغذ جدا کنید و بدون این‌که دوبار از روی یک خط بگذرید، رسم کنید.

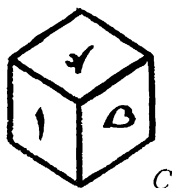
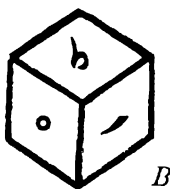
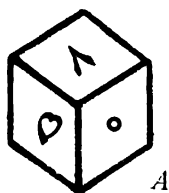
بین برخی از این رقم‌ها، درجاهایی، نمادهای + و - را قرار دهید، به‌نحوی که حاصل کل آن برابر ۱۰۰ شود.

اکنون رقم‌های از ۱ تا ۹ را، به‌ترتیب نزولی بنویسید.

۹۸۷۶۵۴۳۲۱

و مساله را حل کنید.

۹. روی وجه‌های یک مکعب، عددهای ۵، ۴، ۱، ۶ و ۸ نوشته شده‌است (روی هروجه یک عدد). سه موقعیت مختلف این مکعب، در شکل ۲ داده شده‌است. در هر شکل، عددی را پیدا کنید که روی وجه زیرین نوشته شده‌است.

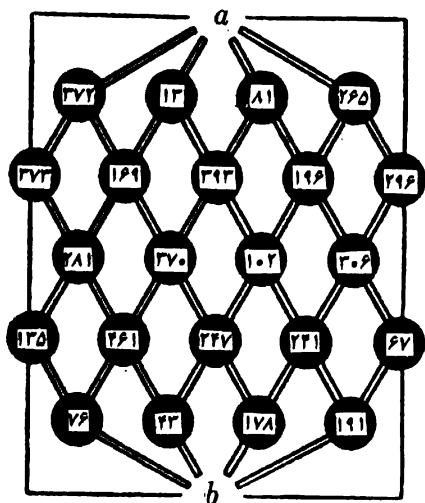


شکل ۲: موقعیت‌های مختلف یک مکعب

۱۰. بین دو شهر A و B، مسیرهای مختلفی زیادی وجود دارد، ولی یکی از این مسیرها، از بقیه کوتاه‌تر و به‌طول هزار کیلومتر است آن را پیدا کنید (شکل ۳).

۱۱. در یک کارخانه، سه دوست کار می‌کنند: چلنگر، تراش‌کار و جوش‌کار. نام کوچک آن‌ها، بهروز، مزدک و سروش است. چلنگر از همه کوچکتر است و خواهر یا برادری ندارد. سروش که از تراش‌کار بزرگتر است، با خواهر بهروز ازدواج کرده‌است. نام چلنگر، تراش‌کار و جوش‌کار چیست؟

۱۲. توکا، مژده، سهراب و رامین، جوانانی هنرمندند. یکی در گروه باله کار می‌کند، دیگری نقاش است، سومی آواز می‌خواند و چهارمی داستان



شکل ۳: کوتاه‌ترین مسیر کدام است؟

می‌نویسد. درباره آن‌ها، می‌دانیم:

(۱) توکا و سهراب، در سالنی که آوازخوان، برای نخستین بار، هنرنمایی می‌کرد، حاضر شده بودند.

(۲) مژده و داستان‌نویس، باهم، به دیدار نقاش رفته‌اند.

(۳) نویسنده، زندگی‌نامه رامین را به صورت یک رمان نوشته است و خیال دارد، درباره توکا هم بنویسد.

(۴) توکا، هرگز چیزی درباره سهراب نشنیده است.

چه کسی به چه کاری مشغول است؟

۱. مجموعه‌ها

اندیشه مربوط به نظریه مجموعه‌ها و مفهوم آن، تا ژرفای همه شاخه‌های ریاضیات امروزی نفوذ کرده و، به‌واقع، چهره آن را دگرگون کرده‌است، کسی نمی‌تواند تصور درستی درباره ریاضیات امروزی داشته‌باشد، مگر این‌که با مقدمه‌های نظریه مجموعه‌ها، آشنا باشد.

پاول سرگه‌یه‌ویچ آلکساندروف

۱§. ورود به مطلب

هرگز اندیشیده‌اید که «جمع، یعنی چه؟» از همان زمانی که پشت نیمکت سال اول دبستان نشسته بودیم، تا امروز، کمتر پیش آمده‌است، روزی را بدون انجام «عمل جمع» بگذرانیم. «قاعده جمع کردن» را می‌دانیم و از کاربردهای آن آگاهیم؛ ولی خود «عمل جمع» را چگونه تعریف کنیم؟ اگر تلاش کنید تعریفی، برای عمل جمع، پیدا کنید، متوجه می‌شوید که ناچارید، به‌صورتی آشکار یا پنهان، از خود واژه «جمع» یا واژه‌ای هم‌ارز آن استفاده کنید.

جمع، یعنی افزودن چند عدد به یکدیگر؛

روی هم‌ریختن عددها را، جمع گویند؛

عمل اضافه کردن واحدهای یک عدد، به واحدهای عدد دیگر را، جمع گویند. ...

تنها با واژه‌ها بازی شده‌است؛ افزودن، روی هم ریختن، اضافه کردن، همه این‌ها، به معنای «جمع کردن» هستند؛ مثل این است که بگوییم: جمع کردن عملی است که به آن عمل جمع گویند.

البته، این جمله، درست است، ولی عیب آن در این است که، هیچ حرف

تازه‌ای ندارد و چیزی به آگاهی ما نمی‌افزاید.

دشواری کار در کجا است؟

جمع، ساده‌ترین عمل ریاضی است. عملی ساده‌تر از آن وجود ندارد تا بتوان، باتکیه بر آن، جمع را تعریف کرد، در ضمن، هیچ تعریفی را از «هیچ» و بدون هیچ دستگیره‌ای، نمی‌توان آغاز کرد. آنچه جمع را به شما می‌شناساند، خود «عمل جمع» است، نه تعریف آن. زندگی، عمل و نیازهای روزانه است که درک معنای جمع را در ذهن ما به وجود می‌آورد ...

۲۴. مجموعه

برخلاف واژه «جمع» که معرف ساده‌ترین عمل در ریاضیات است، واژه «مجموعه»، مفهومی بسیار کلی است که نه تنها در ریاضیات و دانش‌های دیگر (مثل فیزیک، زیست‌شناسی، اخترشناسی و غیره)، که در زندگی روزانه هم، کاربرد فراوانی دارد. در عین حال که «مجموعه» یک مفهوم کلی است، مفهوم یا مفهوم‌هایی ساده‌تر از آن پیدا نمی‌شود که، با تکیه بر آن‌ها، بتوان آن را تعریف کرد. از این بابت، می‌توان گفت که «مجموعه» هم، مثل «جمع»، یک مفهوم «مقدماتی» و غیرقابل تعریف است.

به جای «مجموعه»، می‌شد از واژه‌هایی مثل «تیم»، «کلکسیون»، «گروه»، «خانواده»، «دسته»، «طبقه»، «قشر» و غیر آن استفاده کرد:

- تیم والیبال مدرسه ما؛
- کلکسیون تمبر خسرو؛
- گروه کوه‌نوردان؛
- خانواده خط‌های راست موازی با هم؛
- دسته تظاهرکنندگان؛
- طبقه کارگران؛
- قشر روشنفکران؛ ...

به جای همه این واژه‌ها، می‌توانستیم از واژه «مجموعه» استفاده کنیم. ردیف کردن این واژه‌ها، مشکل ما را درباره تعریف مجموعه حل نمی‌کند. این واژه‌ها، از یک طرف غنی بودن زبان محاوره‌ای را نشان می‌دهد و، از طرف دیگر، به خاطر کاربرد فراوانی که در گفت‌وگوهای روزانه دارند، تصور ما را درباره «مجموعه» روشن‌تر می‌کنند.

ولی توجه کنیم: واژه «مجموعه»، در زبان عادی، اندکی همراه با ابهام است و اغلب به معنای «خیلی» به کار می‌رود. وقتی می‌گوییم: «کاه»، مجموعه‌ای از بهترین تابلوهای نقاشی را در اختیار دارد، نه تعداد تابلوهای او و نه نوع این تابلوها برای ما روشن نمی‌شود. یا اگر بشنویم: «مجموعه‌ای از هواداران تیم به ورزشگاه آمده بودند»، مثل این است که به ما گفته باشند: «خیلی از هواداران تیم در ورزشگاه جمع شده بودند».

ولی در ریاضیات، وقتی از واژه «مجموعه» استفاده می‌کنیم که بدانیم، در آن:

- (۱) چه چیزهایی گرد هم آمده‌اند؛
- (۲) چگونه می‌توان آن‌ها را تشخیص داد، یعنی چگونه می‌توان فهمید، فلان چیز، در این «گرد هم‌آیی» شرکت دارد یا نه؛
- (۳) آیا تعداد این چیزها، شمردنی است یا بی‌شمار است، و اگر شمردنی است، چقدر است؟

مثلاً، وقتی می‌گوییم: «مجموعه عددهای فرد بین ۴۰ و ۵۰ معلوم است

که

- (۱) با عددهای فرد سروکار داریم؛
 - (۲) این عددها باید از ۴۰ بزرگتر و از ۵۰ کوچکتر باشند؛
 - (۳) آن‌ها را می‌توان شمرد، تعداد آن‌ها برابر است با ۵.
- اگر نام این مجموعه را A بگذاریم، می‌توانیم بنویسیم:

$$A = \{41, 43, 45, 47, 49\}$$

همیشه برای نشان دادن یک مجموعه، از نشانه $\{\}$ استفاده می‌کنند. دربارهٔ مجموعه A می‌گویند:

(۱) A ، مجموعه‌ای با پایان (یا متناهی) است، یعنی از جایی آغاز شده و درجایی به پایان رسیده است؛

(۲) هرکدام از عددهای ۴۱، ۴۳، ۴۵، ۴۷ یا ۴۹، یک عضو مجموعه A است.

(۳) عددی عضو مجموعه A است که عددی درست و فرد باشد؛ درضمن از ۴۰ کوچکتر یا از ۵۰ بزرگتر نباشد.

۳۴. نماد عضو بودن و نماد عضو نبودن

در مثال بالا، برای این‌که بنویسید: ۴۷ عضوی از مجموعه A است، از نماد $\in$ استفاده می‌کنیم:

$$47 \in A \quad \text{یا} \quad 47 \in \{41, 43, 45, 47, 49\}$$

نماد $\notin$ را هم، برای عضو نبودن به کار می‌بریم: $19 \notin A$.
در حالت اول، می‌خوانیم: «۴۷ عضو مجموعه A است»، یا «۴۷ متعلق به مجموعه A است».

در حالت دوم: «۱۹ عضو مجموعه A نیست»، یا «۱۹، متعلق به مجموعه A نیست».

[برخی از نویسندگان کتاب‌های ریاضی، برای «عدم عضویت»، از نماد $\bar{\in}$ ، استفاده کرده‌اند.]

به‌همین مناسبت، نماد $\in$ را، «نماد عضویت» یا «نماد تعلق»؛ و نماد $\notin$ [یا $\bar{\in}$] را «نماد عضو نبودن» یا «نماد عدم تعلق» نامیده‌اند.
مثال‌هایی از عضویت:

– تهران عضوی از مجموعه شهرهای ایران است.

- «پ» عضوی از مجموعهٔ حرف‌های زبان فارسی است.

- زمین عضوی از مجموعهٔ سیاره‌های دستگاه خورشیدی است.

- مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به طول ۵ سانتی‌متر، عضوی از مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع است.

- مربع، عضوی از مجموعهٔ چهارضلعی‌هاست.

- عدد ۱۸۹، عضوی از مجموعهٔ عددهای بخش‌پذیر بر ۹ است.

که در این نمونه‌ها، تنها سه مثال آخر، به مجموعه‌های ریاضی مربوط می‌شوند.

معمول شده‌است که، خود مجموعه را، با یکی از حرف‌های بزرگ لاتینی:

$$A, B, \dots, M, N, \dots, X, Y, Z$$

و عضو یک مجموعه را با حرف‌های کوچک لاتینی:

$$a, b, \dots, m, n, \dots, x, y, z$$

نشان می‌دهند.

۴۴. مجموعهٔ معین

دیدیم، عضوهای یک مجموعه، به یاری رفتار آن‌ها - و یا دقیق‌تر: به یاری ویژگی‌های مشترک آن‌ها - مشخص می‌شوند. رفتار عضوهای یک مجموعه و یا ویژگی‌های مشترک آن‌ها، باید طوری معین شود که

(۱) همهٔ عضوهای مجموعه را دربر گیرد؛

(۲) معرف هیچ چیزی، غیر از عضوهای مجموعه نباشد؛

(۳) دربارهٔ عضویت یا عدم عضویت یک چیز به مجموعه موردنظر، تردید ایجاد نکند.

در چنین وضعی، مجموعه را معین می‌نامیم. در ریاضیات مقدماتی و در آغاز بررسی مجموعه‌ها، تنها با مجموعه‌های معین سروکار داریم.

مثال ۱. «مجموعه عددهای کوچکتر از ۱۰۰ که بر ۲ و ۳ و ۵ بخش پذیر باشند»، یک مجموعه معین است. اگر این مجموعه را A بنامیم، داریم:

$$A = \{30, 60, 90\}$$

این مجموعه، سه عضو دارد و هیچ ابهامی در تعیین عضوهای آن پدید نمی‌آید.

مثال ۲. «مجموعه مثلث‌هایی که عیلامی‌ها، در کتیبه‌های خود رسم کرده‌اند»، یک مجموعه معین نیست، زیرا، از یک طرف، به همه کتیبه‌های باقی‌مانده از عیلامی‌ها دسترسی نداریم و، از طرف دیگر، بسیاری از کتیبه‌های این قوم از بین رفته است و هرگز در اختیار ما قرار نمی‌گیرد.

همچنین، «مجموعه سیاره‌های کوچک و بزرگی که به دور خورشید می‌چرخند» یک مجموعه نامعین است. در واقع، به جز سیاره‌های بزرگ (یعنی عطارد، زهره، زمین، مریخ، مشتری، زحل، اورانوس، نپتون و پلوتون)، سیاره‌های کوچکی هم به دور خورشید می‌چرخند که نزدیک به ۱۶۰۰ عدد از آن‌ها، تاکنون شناخته شده‌اند و به «سیارک» یا «آستروئید» موسوم‌اند و، با مجهزتر شدن ابزارهای مشاهده، روز به روز بر تعداد آن‌ها افزوده می‌شود. برخی از این سیارک‌ها - مثل «سرس»، «پالاس» و غیره تا صدها کیلومتر قطر دارند، در حالی که قطر برخی از یک کیلومتر تجاوز نمی‌کند. تا کجا باید، این سیارک‌ها را عضو مجموعه دانست؟ به جز این، معلوم نیست، سیاره‌های بزرگ دستگاه خورشیدی، به پلوتون ختم شده باشند. همین چندی پیش اطلاع دادند، نشانه‌هایی از یک سیاره دستگاه خورشیدی، در فاصله‌ای بسیار دورتر از پلوتون، پیدا شده است.

این، مجموعه‌ای نامعین است و در «ریاضیات مقدماتی»، مورد بررسی

۵§. مجموعه‌های با پایان و مجموعه‌های بی‌پایان

این مجموعه‌ها را در نظر می‌گیریم:

۱. مجموعه عددهای یک‌رقمی را A می‌نامیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

۲. مجموعه B : عددهای اول بین ۳۰ و ۵۰:

$$B = \{31, 37, 41, 43, 47\}$$

۳. مجموعه عددهای زوج، که آن را M می‌نامیم:

$$M = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

۴. مجموعه عددهای بخش‌پذیر بر ۱۷ و مخالف صفر (مجموعه N):

$$N = \{17, 34, 51, 68, 85, \dots\}$$

دو مجموعه A و B ، با دو مجموعه M و N ، تفاوتی اساسی باهم دارند. در مجموعه‌های A و B ، تعداد اعضا محدود است؛ A دارای ۹ عضو و B دارای ۵ عضو است. این‌گونه مجموعه‌ها را، مجموعه‌های باپایان (یا مجموعه‌های محدود، یا مجموعه‌های متناهی) گویند.

در مجموعه‌های M و N (با این‌که می‌توانیم بفهمیم، کدام عدد، عضو مجموعه M یا N است و کدام عدد عضو این یا آن نیست)، نمی‌توانیم همه اعضا را بنویسیم، زیرا تعداد آن‌ها «بی‌نهایت» است، یعنی پایان‌ناپذیرند و، به همین جهت، آن‌ها را مجموعه‌های بی‌پایان (یا مجموعه‌های نامحدود،

یا مجموعه‌های نامتناهی) گویند. سه نقطه‌ای را که بعد از جمله ۱۰ در مجموعه M و بعد از جمله ۸۵ در مجموعه N گذاشته‌ایم، به معنای این است که، در این مجموعه‌ها، جمله آخر وجود ندارد و تاهرجا پیش برویم، باز هم جمله‌های بعد از آنها وجود دارد.

یادداشت. به این نکته مهم توجه کنید که، در یک مجموعه، عضو تکراری، عضو جدید به حساب نمی‌آید. هر عضو تنها یک بار نوشته می‌شود و اگر در مجموعه‌ای، یک یا چند عضو، دو یا چندبار تکرار شده باشند، می‌توان از عضوهای تکراری صرف نظر کرد. مثلاً مجموعه

$$A = \{۳, ۵, ۷, ۹\}$$

با مجموعه

$$B = \{۵, ۳, ۵, ۷, ۵, ۹\}$$

فرقی ندارد، اگرچه در مجموعه B ، عدد ۵ سه بار تکرار شده است. دو مجموعه A و B باهم برابرند. در واقع دو مجموعه، وقتی برابرند که، هر عضو مجموعه اول، عضوی از مجموعه دوم؛ هر عضوی از مجموعه دوم، عضوی از مجموعه اول باشد.

در این جا می‌توانیم بنویسیم:

$$A = B$$

در ضمن، در بحث کلی از مجموعه‌های بی‌پایان (و در مجموعه‌های باپایان که مورد بررسی ما در این کتاب است)، ردیف نوشتن عضوهای مجموعه، هیچ نقشی ندارد:

$$\{۳, ۵, ۷, ۹\} = \{۵, ۹, ۳, ۷\}$$

البته در مجموعه‌های بی‌پایان، منطقی‌تر این است که ردیف را رعایت کنیم، نه به این خاطر که اگر ردیف جمله‌ها را عوض کنیم، مجموعه تغییر می‌کند، بلکه به این دلیل که بتوانیم از روی ردیف جمله‌ها، قانونی را که بر آن‌ها حاکم است، بفهمیم و بتوانیم جمله‌های بعدی را (که نوشته نشده است) حدس بزنیم.

۶۴. شکل دیگر نوشتن یک مجموعه

برای نوشتن یک مجموعه، می‌توانیم، به جای این که تک تک عضوهای آن را نام ببریم (کاری که تا این جا کردیم)، ویژگی مشترک عضوهای آن را ذکر کنیم. این مجموعه را در نظر بگیرید:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

عضوهای این مجموعه، دو ویژگی مشترک دارند: ۱) همه آن‌ها عددهایی فردند؛ ۲) همه آن‌ها عددهایی یک‌رقمی‌اند. به این ترتیب، اگر بگوییم: عددهای فرد یک‌رقمی، عضوهای مجموعه A را تشکیل داده‌اند، توانسته‌ایم مجموعه A را به طور کامل معرفی کنیم.

چون عضوهای مجموعه را با حرف‌های کوچک الفبای لاتینی نشان می‌دهند، a را نامی عمومی برای هر عضو مجموعه A انتخاب می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$A = \{a \mid a \text{ عدد فرد یک‌رقمی است}\}$$

که البته، آن را به این صورت هم می‌توان نوشت:

$$A = \{a \mid a = 1, 3, 5, 7, 9\}$$

اکنون، این مجموعه را در نظر بگیرید:

$$X = \{3, -3\}$$

این مجموعه دو عضو دارد: ۳ و -۳، که قرینه یکدیگرند. پس می‌توان نوشت:

$$X = \{x | x^2 = 9\}$$

از این روش، برای نوشتن مجموعه‌های بی‌پایان هم می‌توان استفاده کرد. اگر مجموعه‌ای، شامل همه عددهای زوج (مثبت) باشد و مجموعه را با Y نشان دهیم، می‌توان یکی از دو صورت زیر را برای معرفی آن انتخاب کرد:

$$Y = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

$$Y = \{y | y = 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

در این جا منظور از $\mathbb{N}$ ، مجموعه عددهای طبیعی است؛ یعنی اگر k عددی طبیعی باشد، $y = 2k$ ، عددی زوج (یعنی عضوی از مجموعه Y) است.

۷.۸. مجموعه یکانی و مجموعه تهی

واژه مجموعه، در زبان عادی، به معنای «خیلی» و «بسیار» است. وقتی می‌گوییم: فرهاد، مجموعه‌ای از کتاب‌های ریاضی را جمع‌آوری کرده‌است، به‌طور طبیعی، در ذهن ما، چند کتاب (و بی‌تردید، بیش از دو کتاب) مجسم می‌شود. ولی در ریاضیات، می‌توان با مجموعه‌هایی سروکار داشت که تنها یک عضو داشته باشند و یا، حتی، عضوی نداشته باشند.

مجموعه‌ای را که تنها یک عضو داشته باشد، مجموعه یکانی و مجموعه بدون عضو را، مجموعه تهی می‌گویند.

برای مجموعه تهی، نماد خاصی هم در نظر گرفته‌اند: ϕ .

چند مثال

۱) مجموعه حرف‌های نقطه‌دار در واژه «مژده». این، یک مجموعه یکانی است، زیرا «مژده» تنها یک حرف نقطه‌دار دارد: «ژ».

(۲) مجموعه جواب‌های معادله $2x = 6$. این هم، یک مجموعه یکانی است؛ معادله $2x = 6$ تنها یک جواب دارد: $x = 3$.

(۳) مجموعه حرف‌های نقطه‌دار، در واژه «ره‌آورد»، یک مجموعه تهی است: در واژه «ره‌آورد»، حرف نقطه‌دار وجود ندارد.

(۴) مجموعه عددهای اول بین دو عدد ۱۱۴ و ۱۲۶، یک مجموعه تهی است، زیرا بین این دو عدد، عدد اول پیدا نمی‌شود. درواقع، بین دو عدد ۱۱۴ و ۱۲۶، شش عدد فرد وجود دارد (عددهای زوج اول نیستند، چون بر ۲ بخش‌پذیرند):

$$115, 117, 119, 121, 123, 125$$

که هیچ‌کدام از آن‌ها، اول نیستند: ۱۱۵ و ۱۲۵، بر ۵ بخش‌پذیرند، ۱۱۷ و ۱۲۳ بر ۳ بخش‌پذیرند؛ ۱۱۹ بر ۷ و ۱۲۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر است. بنابراین، مجموعه عددهای اول بین دو عدد ۱۱۴ و ۱۲۶، یک مجموعه تهی است.

*یادداشت. دو نکته را درباره مجموعه تهی یادآور می‌شویم: اول این‌که، ممکن است، مجموعه نامعین باشد و نتوانیم حکم کنیم، آیا مجموعه مفروض، تهی است یا نه!

مثلاً فرضیه‌ای وجود دارد (فرضیه فویرباخ) که هر عدد زوج را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. ولی این فرضیه ثابت نشده است. بنابراین نمی‌دانیم «مجموعه عددهای زوجی که آن‌ها را به صورت مجموع دو عدد اول نمی‌توان نوشت»، یک مجموعه تهی است یا نه!

همچنین فرضیه‌ای وجود دارد (فرضیه کوچک‌پور) که بنابراین، هر عدد طبیعی برابر است با نصف مجموع دو عدد اول که نسبت به آن عدد طبیعی، هم‌فاصله‌اند. مثلاً

$$10 = \frac{1}{2}(7 + 13) = \frac{1}{2}(3 + 17)$$

درضمن، فاصله ۱۰ تا ۷، برابر است با فاصله ۱۰ تا ۱۳، یا فاصله ۳ تا ۱۰ برابر است با فاصله ۱۰ تا ۱۷. همچنین

$$۲۹ = \frac{1}{۲}(۱۷ + ۴۱); ۱۰۰ = \frac{1}{۲}(۹۷ + ۱۰۳)$$

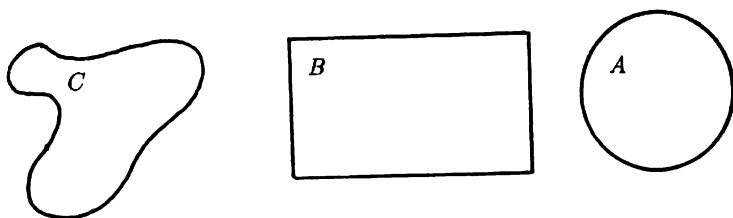
ولی چون این فرضیه ثابت نشده است، نمی دانیم، مجموعه عددهایی که نتوان آن‌ها را به این صورت نوشت، تهی است یا نه!

نکته دوم این که، تنها یک مجموعه تهی وجود دارد؛ یعنی همه مجموعه‌های تهی با هم برابرند.

مجموعه دانش‌آموزان سه ساله سال اول دبیرستان، با مجموعه عددهای کوچکتر از ۲۰ که بر ۳۱ بخش پذیر باشند، دو مجموعه متفاوت نیستند.

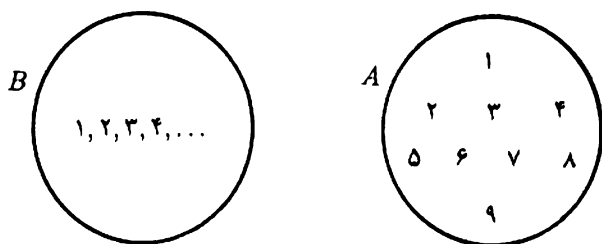
۸۵. نمایش هندسی مجموعه‌ها

برای نشان دادن یک مجموعه می‌توان از یک شکل مستوی که دوره‌ای بسته داشته باشد، استفاده کرد. همان‌طور که در شکل ۴ می‌بینید، این شکل، می‌تواند هر شکل مستوی دلخواهی باشد، ولی معمول شده است، برای نمایش



شکل ۴: شکل‌های هندسی، برای نمایش مجموعه‌های A، B و C

هندسی یک مجموعه - که به آن نمودار ون آن مجموعه گویند - از دایره استفاده کنند.



شکل ۵: A، مجموعه عددهای یک رقمی B، مجموعه عددهای طبیعی

اغلب ضرورتی پیدا نمی‌کند، عضوهای مجموعه را در درون دایره‌ای که برای نمایش هندسی آن رسم کرده‌ایم، بنویسیم یا نقاشی کنیم، زیرا نمودار وِن، بیشتر برای درک قانون‌هایی که بر بستگی دویا چند مجموعه، نسبت به هم حاکم است، به کار می‌رود، نه نمایش یک مجموعه. با وجود این، گاهی لازم می‌شود، عضوهای مجموعه را مشخص کنیم (شکل ۵) که، در این صورت، باید آن‌ها را نام ببریم، یا ویژگی مشترک آن‌ها را بنویسیم. برای نخستین بار لئونارد اولر (۱۷۵۳-۱۷۸۳)، برای نمایش یک مجموعه، از شکل‌های هندسی استفاده کرد، ولی جون وِن (۱۸۳۴-۱۹۲۳) بود که با کاربرد فراوان نمایش هندسی مجموعه، در نوشته‌های خود، آن را عمومی کرد؛ به همین مناسبت است که به این نمایش هندسی، نمودار وِن می‌گویند.

۹.۸. زیرمجموعه یا مجموعه‌ک

به واژه «بالین» توجه کنیم. این واژه، مجموعه‌ای از پنج حرف الفباست:

$$A = \{ \text{ب، ا، ل، ی، ن} \}$$

اکنون تلاش کنید واژه‌های دیگری، با چند حرف از این پنج حرف بسازید که در زبان فارسی معنی داشته باشند.

با یک حرف، نمی‌توان واژه‌ای ساخت. ولی واژه‌های (معنی‌دار) دوحرفی، سه‌حرفی، چهارحرفی و پنج‌حرفی را در این جا آورده‌ایم:

دوحرفی: لب، آب، نی، یل، بُن؛

سه‌حرفی: بال، نیل، بنا، بلا، نای، بیل، ناب؛

چهارحرفی: یلان، لبان؛

پنج‌حرفی: بیلان.

روشن است، اگر به معنای واژه‌ها، اهمیت ندهیم، فهرست واژه‌های ما، خیلی درازتر می‌شود.

مجموعه A ، شامل پنج حرف بود ب، ا، ل، ی و ن. در واژه‌هایی که درست کردیم، از هیچ حرف دیگری به جز همین پنج حرف استفاده نکردیم. در نظریه مجموعه‌ها، هریک از واژه‌های جدید را، زیرمجموعه‌ای از واژه «بالین» می‌گویند.

به این نکته‌های مهم توجه کنید:

(۱) در ریاضیات، به معنای واژه‌ها توجه نمی‌کنیم، بنابراین باید همه واژه‌هایی را که می‌توان با این پنج حرف ساخت، زیرمجموعه A به حساب آوریم، حتی زیرمجموعه‌های «یک‌حرفی»

(۲) واژه «بیلان» شامل هر پنج حرف مجموعه A است و درواقع، از نظر ریاضی، با مجموعه A برابر است، با وجود این، می‌توان آنرا هم زیرمجموعه‌ای از A دانست.

(۳) دو واژه «بال و بلا» و، همچنین، دو واژه «ناب» و «بنا»، از نظر ریاضی، دو مجموعه مختلف نیستند، زیرا عضوهای یکی، با عضوهای دیگری، تفاوتی ندارد.

(۴) در شناسایی زیرمجموعه، بهتر است بگوییم: باید شامل هیچ عضوی، جز عضوهای مجموعه اصلی نباشد؛ در این صورت، مجموعه تهی

هم، زیرمجموعه‌ای از مجموعه A است.

تعریف. مجموعه B را زیرمجموعه‌ای از مجموعه A گوئیم، وقتی که هر عضو B ، درضمن، عضوی از مجموعه A باشد.

بنابر این تعریف: هر مجموعه‌ای را می‌توان زیرمجموعه‌ای از خودش دانست؛ درضمن، مجموعه تهی، زیرمجموعه هر مجموعه دلخواه است. به مثال‌هایی از ریاضیات پردازیم. این مجموعه را در نظر می‌گیریم:

$$P = \{1, 3, 5\}$$

ببینیم، مجموعه P ، چند زیرمجموعه دارد.

(۱) مجموعه بدون عضو، یعنی مجموعه تهی: ϕ ؛

(۲) سه مجموعه یک‌عضوی: $\{1\}$ ، $\{3\}$ ، $\{5\}$ ؛

(۳) سه مجموعه دو‌عضوی: $\{1, 3\}$ ؛ $\{1, 5\}$ ؛ $\{3, 5\}$ ؛

(۴) یک مجموعه سه‌عضوی: $\{1, 3, 5\}$.

روی هم ۸ تا. مجموعه P ، دارای ۸ زیرمجموعه است.

اکنون، ببینیم، مجموعه زیر که دارای چهار عضو است، چند زیرمجموعه

دارد:

$$Q = \{1, 3, 5, 7\}$$

همه زیرمجموعه‌های P ، زیرمجموعه‌های Q هم هستند، ولی اگر به هریک

از زیرمجموعه‌های مجموعه P ، عضو ۷ را اضافه کنیم، زیرمجموعه‌های

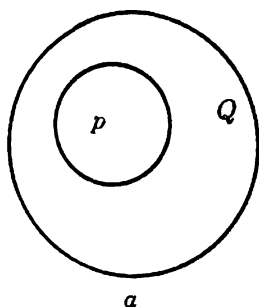
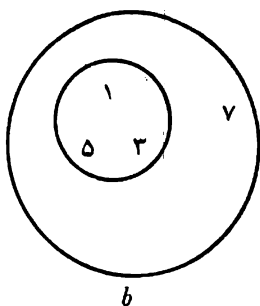
جدیدی برای Q به دست می‌آید:

(۱) اگر به عضوهای مجموعه تهی، عضو ۷ را اضافه کنیم، مجموعه

یکانی $\{7\}$ به دست می‌آید؛

(۲) اگر به هریک از سه مجموعه یک‌عضوی، عضو ۷ را اضافه کنیم،

سه مجموعه دو‌عضوی $\{1, 7\}$ ، $\{3, 7\}$ و $\{5, 7\}$ به دست می‌آید؛



شکل ۶

(۳) با اضافه کردن عضو ۷ به هرکدام از مجموعه‌های دوعضوی، سه زیرمجموعه تازه برای Q پیدا می‌شود که هرکدام سه عضو دارند:

$$\{1, 3, 7\}, \quad \{1, 5, 7\}, \quad \{3, 5, 7\}$$

(۴) با اضافه کردن عضو ۷ به مجموعه سه‌عضوی $\{1, 3, 5\}$ ، مجموعه چهارعضوی $\{1, 3, 5, 7\}$ نتیجه می‌شود.

به این ترتیب، مجموعه Q ، به جز ۸ زیرمجموعه P ، ۸ زیرمجموعه دیگر هم دارد، روی هم ۱۶ زیرمجموعه.

زیرمجموعه را با نماد $\subset$ نشان می‌دهند، مثلاً در مورد مجموعه‌های P و Q ، می‌توان نوشت:

$$P \subset Q$$

در نمایش هندسی، وقتی که مجموعه‌ها را با نمودار ون نشان دهیم، دو مجموعه P و Q ، به صورت شکل ۶ (a یا b) نشان داده می‌شوند: در شکل ۶-a، تنها نام دو مجموعه آمده است، ولی در شکل ۶-b، عضوهای دو مجموعه مشخص شده‌اند.

همچنین می‌توان نوشت

$$\{1, 3, 5\} \subset \{1, 3, 5, 7\}$$

گاهی هم، بنابه ضرورت، می نویسند:

$$Q \supset P$$

چند نتیجه ناشی از تعریف زیرمجموعه

۱. نماد زیرمجموعه، برگشت پذیر نیست، یعنی اگر A ، زیرمجموعه ای از B باشد، ممکن است B زیرمجموعه A نباشد.
درستی این حکم روشن است؛ اگر داشته باشیم:

$$A = \{a, c\} \text{ و } B = \{a, b, c\}$$

روشن است که $A \subset B$ ، زیرا هر عضو A (a یا c) در ضمن عضوی از B است؛ ولی B زیرمجموعه A نیست، زیرا حرف b (که عضوی از مجموعه B است) در بین عضوهای مجموعه A دیده نمی شود.

۲. اگر درمورد دو مجموعه C و D ، نماد $\subset$ برگشت پذیر باشد، یعنی اگر $C \subset D$ و $D \subset C$ ، آنوقت C و D ، دو مجموعه برابرند:
 $C = D$.

۳. نماد $\subset$ سرایت پذیر است، یعنی از $A \subset B$ و $B \subset C$ ، نتیجه می شود: $A \subset C$. مثلاً فرض کنیم:

A ، مجموعه عددهای بخش پذیر بر ۴؛

B ، مجموعه عددهای بخش پذیر بر ۲؛

C ، مجموعه عددهای طبیعی.

روشن است که $A \subset B$ (هر عددی که بر ۴ بخش پذیر باشد، بر ۲ هم بخش پذیر است) و $B \subset C$ (هر عدد بخش پذیر بر ۲، یکی از عددهای طبیعی است)؛ در ضمن $A \subset C$ (هر عددی که بر ۴ بخش پذیر باشد، عددی طبیعی است).

۱۰۵. مجموعه مادر و مجموعه متمم
اگر مجموعه همه عددهای طبیعی را C بنامیم

$$C = \{1, 2, 3, \dots, 10, 11, 12, \dots\}$$

آنوقت مجموعه B ، که شامل همه عددهای زوج (بخش‌پذیر بر ۲) است:

$$B = \{2, 4, 6, \dots, 10, 12, \dots\}$$

زیرمجموعه‌ای از آن است: $B \subset C$ ؛ یعنی هر عضو B ، در ضمن عضوی از C است؛ به زبان دیگر، عضوهای مجموعه B را از بین عضوهای مجموعه C انتخاب کرده‌ایم؛ به همین مناسبت می‌توان مجموعه C را، مجموعه مادر یا مجموعه مرجع نامید.

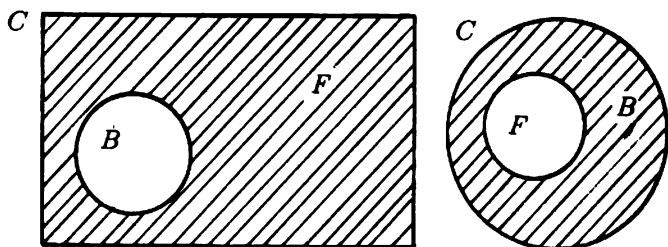
هر مجموعه‌ای را می‌توان مجموعه مادر، برای هریک از زیرمجموعه‌های خود دانست.

وقتی عددهای زوج را از مجموعه C برداریم (و مجموعه B را تشکیل دهیم) آنچه باقی می‌ماند، خودش یک مجموعه است: مجموعه عددهایی که بر ۲ بخش‌پذیر نیستند، یعنی مجموعه عددهای فرد. اگر مجموعه عددهای فرد را F بنامیم، آنوقت F را متمم مجموعه B ، نسبت به مجموعه مرجع C گویند. البته، نسبت به مجموعه مرجع C ، مجموعه B هم، متمم مجموعه F است.

به جای واژه متمم، می‌توان از واژه تفاضل استفاده کرد و نوشت:

$$C - B = F \text{ یا } C - F = B$$

در شکل ۷، بخش سایه‌خورده، نماینده مجموعه متمم یا تفاضل دو مجموعه است. گاهی برخی از نویسندگان توصیه می‌کنند که، مجموعه مادر با مستطیل نشان داده شود، ولی همان‌طور که پیش‌ازاین گفتیم، برای نمودار



شکل ۷:

ون، هیچ قیدی وجود ندارد و برای نمایش هندسی یک مجموعه (مرجع یا غیرمرجع) از هر شکلی می‌توان استفاده کرد.

* ۱۱۸. اندکی بیشتر دربارهٔ مجموعه‌ها

به‌ویژه، از زمانی که زنون، برای به‌کرسی نشاندن فلسفهٔ استاد خود، پارمنیدس (که معتقد بود، در جهان، حرکتی وجود ندارد و، آنچه به‌نام حرکت شناخته‌شده‌است، تنها تصویری ذهنی است)، چهار استدلال شبه‌ریاضی، برای اثبات «بی‌حرکتی» آورد، همهٔ ریاضی‌دانان (وهم فیلسوفان) از طرح مفهوم «بی‌نهایت» یا «نامتناهی» فرار می‌کردند. ارسطو هم معتقد بود که خود واژهٔ بی‌نهایت، همراه با تناقض است و نزدیک به دوهزار سال بعد، هگل فیلسوف آلمانی هم، بی‌نهایت را مفهومی می‌دانست که با خودش در تضاد است.

درواقع، زنون، استدلال‌های خود را، با استفاده از مفهوم بی‌نهایت (چه بی‌نهایت کوچک و چه بی‌نهایت بزرگ) گذاشته بود. یکی از استدلال‌های او را می‌آوریم.

اگر قهرمان دو، از لاک‌پشت عقب باشد، هرگز نمی‌تواند به لاک‌پشت

برسد.

زنون استدلال می‌کرد، در مدتی که قهرمان، فاصله اولیه بین خود و لاک‌پشت را می‌پیماید، لاک‌پشت اندکی جلو رفته است و بنابراین، قهرمان ما باید این فاصله جدید را هم بپیماید. ولی با پیمودن آن، باز هم لاک‌پشت فاصله دیگری را (هر قدر کوچک) جلو رفته است، بنابراین، باز هم فاصله‌ای برای قهرمان می‌ماند که باید طی کند. این استدلال را می‌توان تا بی‌نهایت ادامه داد، برای این که قهرمان به لاک‌پشت برسد، به بی‌نهایت زمان نیاز دارد، یعنی هرگز به او نمی‌رسد.

البته، استدلال‌های زنون، بعدها (و البته خیلی بعد)، چه از نظر ریاضی و چه از نظر فلسفی رد شد، ولی تاملت‌ها، ریاضی‌دانان و فیلسوفان را از نزدیک شدن به مفهوم بی‌نهایت، ترسانده بود.

با وجود این، کارهای ریاضی نیوتون و لایب‌نیتس و دیگران تا حد زیادی این ترس را کنار زده بود، ولی یک بررسی جدی ریاضی لازم بود تا عمل کردن با نامتناهی را در قلمرو ریاضیات قرار دهد.

و این، کانتور (۱۸۴۵-۱۹۱۸ میلادی) بود که، با وارد کردن مفهوم مجموعه و به‌ویژه کشف قانون‌مندی‌های حاکم بر مجموعه‌های نامتناهی، بحث مربوط به «بی‌نهایت» را به حیطة ریاضیات درآورد و بخش عمده‌ای از گریه‌های ذهنی فیلسوفان و ریاضی‌دانان را، به یاری استدلال‌های منطقی و ریاضی، برطرف کرد.

بحث مربوط به مجموعه‌ها و قانون‌های حاکم بر آن، به تدریج بر تمامی ریاضیات سایه افکند و از طریق آن، سایر دانش‌ها را زیر نفوذ خود گرفت و به ابزاری تبدیل شد که، بدون آن، پیشرفت ریاضیات ناممکن به نظر می‌رسید.

ولی باید به یاد داشت که، برای استفاده از مفهوم مجموعه، باید بر قانون‌های حاکم بر آن و بر روش «حساب مجموعه‌ها» (ویا به زبانی دیگر «جبر مجموعه‌ها») تسلط داشت. تنها با به کار بردن واژه مجموعه، مشکل حل نمی‌شود. بودند و هستند مؤلفانی که مثلاً به جای واژه «خط» از واژه

ترکیبی «مجموعه نقطه‌ها» استفاده می‌کنند و یا به جای «دنباله عددهای طبیعی»، اصطلاح «مجموعه عددهای طبیعی» را به کار می‌برند و یا به جای این که بگویند «مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که ...» می‌نویسند «مجموعه نقطه‌هایی از صفحه که ...». ولی این، هیچ دشواری جدی ریاضیات را حل نمی‌کند و تنها می‌تواند موجب شگفتی خواننده شود که: مگر واژه‌ها و اصطلاح‌های قبلی چه عیبی داشت که باید آن‌ها را کنار بگذاریم و به زور واژه «مجموعه» را در جمع‌بندی‌های خود وارد کنیم؟

و.و.سایز (W.W.Sawyes)، ریاضی‌دان و مربی پراعتبار انگلیسی، در پیش‌گفتار کتاب «مسیر ریاضیات جدید» (که در حدود سال ۱۹۷۰ میلادی چاپ شد)، با اندوه درباره این ساده‌اندیشی صحبت می‌کند. او می‌نویسد:

«در میان مسئولان بانفوذ آموزش دبیرستانی، به عده کمی می‌توان برخورد که دیدی واقع‌بینانه داشته باشند. برای پر کردن شکاف‌هایی که در آموزش ریاضی وجود دارد، تلاش جدی انجام نمی‌گیرد، بلکه به‌طور ساده، این شکاف‌ها را می‌پوشانند و پنهان می‌کنند، درست همان‌طور که ترک‌های دیوار، با کاغذ دیواری تازه‌ای پوشانده می‌شود. نوسازی برنامه‌ها، به جای این که اندیشه‌های تازه‌ای بیاورد (که البته به زمان بیشتر و درک بالاتری نیاز دارد)، منجر به ورود اصطلاح‌های تازه‌ای در ریاضیات دبیرستانی شده است. هر جا فرصتی دست دهد، از واژه «مجموعه» استفاده می‌شود و آن وقت، گمان می‌کنند، جزو پیش‌گامان پژوهش‌های آموزشی درآمده‌اند. این واژه، چنان صورت پررمز و افسانه‌ای پیدا کرده است که به کلی از اعتبار افتاده و مفهوم واقعی خود را از دست داده است ...».

نظریه مجموعه‌ها یک زبان است، زبانی است برای بیان مفهوم‌ها و در قانون‌هایی که بر طبیعت و جامعه حکومت می‌کنند. برای استفاده از این زبان، باید آن را یاد گرفت و بر قاعده‌ها و عمل‌های مربوط به آن مسلط شد. خود

واژه مجموعه، به تنهایی از عهده برطرف کردن هیچ مشکلی برنمی آید.



کانتور، به توصیه استاد ریاضی خود، روی موضوعی کار می کرد که، زمانی، فوریه، ریاضی دان بزرگ فرانسوی، آن را آغاز کرده بود؛ در همین پژوهش ها بود که کانتور، به نظریه مجموعه ها رسید (و به ویژه، مقایسه مجموعه های بی پایان).

کانتور، به جز کشف های دیگر خود، به یک موفقیت اساسی رسید: مقایسه مجموعه های بی پایان. او روشن کرد که برخی از مجموعه های بی پایان، هم ارزند و برخی دیگر هم ارز نیستند. به زبان دیگر، «تعداد» اعضا در برخی از مجموعه ها، یکی است (که آن ها را مجموعه های هم توان نامید) و برخی از مجموعه ها نسبت به برخی دیگر «فشرده تر» هستند، یعنی توان بالاتری دارند. گالیله، در زمان خود، معتقد بود که، اگر دو مجموعه بی پایان را با هم مقایسه کنیم، به تناقض برخورد می کنیم، زیرا تعداد عددهای طبیعی، با تعداد عددهای زوج (که زیرمجموعه ای از عددهای طبیعی است) برابر درمی آید. ولی کانتور، درست از همین جا آغاز کرد و نتیجه گرفت، در مجموعه های بی پایان، این هم توانی، امری طبیعی است و هیچ تناقضی در آن وجود ندارد. وقتی که گاوس، ریاضی دان پرکار و پرنبوغ آلمانی، روی مقدار عدد «پی» بحث می کرد، معتقد بود، اگر π را به صورت دنباله ای از عددها بنویسیم.

$$3, 3/1, 3/14, 3/141, 3/1419, \dots$$

درست است که مرتباً به مقدار واقعی عدد π نزدیکتر می شویم، ولی از آن جا که باید مجموعه ای بی پایان از عددها و عمل ها را در نظر بگیریم، به تناقض برمی خوریم (زیرا هرگز نمی توانیم به این تعداد بی پایان عددها و عمل ها دسترسی پیدا کنیم) و، بنابراین، در نظر گرفتن عدد π ، به عنوان حد این دنباله،

در ریاضیات مجاز نیست. و کانتور، این شجاعت را داشت که این شیوه برخورد با مجموعه‌های بی‌پایان را «مجاز» و «قانونی» اعلام کند و چرخشی عقلانی در جهت تکامل ریاضیات پدید آورد.

ولی در زمان کانتور، ریاضی‌دانانی که با سنت‌های کهنه خو گرفته بودند، نمی‌توانستند با پیشنهادهای «انقلابی» او موافق باشند. اگر از معدود کسانی که با او موافق بودند یا، مثل ددکیند، خودشان هم روی مجموعه‌های بی‌پایان کار می‌کردند، بگذریم، همه به تحقیر و سرزنش کانتور پرداختند.

هانری پوانکاره، ریاضی‌دان سرشناس معاصر کانتور، کارهای کانتور را، نوعی بیماری می‌دانست و هیچ ارزشی برای آن قایل نبود. به‌ویژه لئوپولد کرونه‌کر، ریاضی‌دان آلمانی، همه تلاش ذهنی خود را در مخالفت با کانتور گذاشت، او را «شارلاتان» نامید و اعلام کرد: «نظریه مجموعه‌های کانتور، هیچ ارزش واقعی ندارد».

شدت این حمله‌ها چنان بود که کانتور را دچار بیماری عصبی حادی کرد، به‌نحوی که ناچار شد از ریاضیات و از استادی دانشگاه چشم‌پوشد. ولی ارثیه‌ای که از خود باقی گذاشت، روزبه‌روز غنی‌تر و کارآتر شد، به‌نحوی که امروز به‌صورت یکی از نیرومندترین زبان‌ها، برای بیان قانون‌های حاکم بر طبیعت و جامعه درآمده است.



«مجموعه»، یک مفهوم کاملاً کلی است و کارآیی و نیرومندی «نظریه مجموعه‌ها» هم، ناشی از همین کلی بودن و عام بودن آن است. اگر قانونی از نظریه مجموعه‌ها، کشف شود و به‌اثبات برسد، می‌تواند در هر مجموعه‌ای، با هرگونه عضو و هر تعداد عضو، کاربرد داشته‌باشد و، به‌همین مناسبت است که، نظریه مجموعه‌ها، نه‌تنها در ریاضیات، که در همه دانش‌ها از مکانیک

گرفته تا زیست‌شناسی و زبان‌شناسی و دانش‌اجتماعی، کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده‌است.

ولی همین عام بودن مفهوم «مجموعه»، مانعی برای تعریف آن است. معمولاً هر موضوعی را به‌یاری موضوع کلی‌تر از آن، تعریف می‌کنند:

«انسان، حیوانی است که ...»

«هندسه، بخشی از ریاضیات است که ...»

«زمین، سیاره‌ای است که ...»

برای تعریف «انسان»، به مفهوم کلی‌تر «حیوان»، برای تعریف «هندسه»، به مفهوم کلی‌تر «ریاضیات»، برای تعریف «زمین» به مفهوم کلی‌تر «سیاره» متوسل می‌شویم و غیره. و درجهان، مفهومی کلی‌تر از «مجموعه» وجود ندارد که، باتکیه بر آن، بتوانیم «مجموعه» را تعریف کنیم: هر تعریفی از «مجموعه» به‌خود آن برمی‌گردد و به اصطلاح منطق قدیم، یک دور باطل تشکیل می‌دهد. خود کانتور، در تعریف مجموعه می‌گوید:

مجموعه عبارت‌است از یک فراوانی، که در ذهن ما به‌صورت واحد درآمده‌است.

و درجای دیگر:

مجموعه عبارت‌است از اجتماع گروهی چیز در یک کل، به‌نحوی که احساس یا ادراک ما، توانایی تشخیص آن‌ها را داشته باشد.

ولی اگر در این دو عبارت دقت کنیم، به‌جز این‌که تاحدی همراه با نوعی ابهام هستند، سرآخر، برای تعریف مجموعه، از واژه‌هایی مثل «یک فراوانی» یا «اجتماع گروهی چیز» استفاده شده‌است که معنایی جز معنای واژه «مجموعه» ندارند. اگر بخواهیم این‌گونه تعریف‌ها را، ساده و بی‌پیرایه بیان کنیم، به این‌جا می‌رسیم که بگوییم: «مجموعه، یعنی مجموعه». یعنی تعریف مفهوم به‌یاری خودش و این، همان دور باطل است.

تعریف یک مفهوم، باید چند ویژگی داشته‌باشد:

۱) همان‌طور که گفتیم، به‌خودش برنگردد. برای تعریف «زمان»، نمی‌توان گفت: «زمان، یعنی مدت حرکت»، زیرا «مدت» بیان دیگری از همان واژه «زمان» است.

۲) بر مفهومی که از خودش دشوارتر و غیرقابل فهم‌تر است، تکیه نکند. اگر برای تعریف «نقطه» بگوییم: «نقطه چیزی است که بُعد و اندازه‌ای ندارد، ولی مکانی را اشغال می‌کند»، به‌مفهوم‌های «بُعد»، «اندازه» و «مکان» تکیه کرده‌ایم که تعریف و درک هرکدام از آن‌ها، از خود «نقطه» دشوارتر است.

۳) مبهم نباشد. جمله «آتش جوهری ناشناخته است که در بسیط یا مرکب بودن آن جدال دارند، ولی وجود دارد و می‌سوزاند»، علاوه‌بر پیچیده بودن، چیزی را روشن نمی‌کند و ماهیت «آتش» را نشان نمی‌دهد.

۴) از ورود غیرخود جلوگیری کند. اگر برای تعریف «مربع» بگویید: «مربع یک چهارضلعی واقع بر صفحه است که سه زاویه قائمه داشته‌باشد»، درواقع، تعریف «مستطیل» را داده‌اید، یعنی با این تعریف، نتوانسته‌اید تنها از مربع‌ها صحبت کنید، بلکه تعریف شما شامل شکل‌های دیگری هم می‌شود (مستطیل‌ها) که مربع نیستند.

۵) همه چیزهایی را که درنظر دارید، دربر گیرد. اگر بگویید: «لوزی یک چهارضلعی مسطح است که هم ضلع‌های آن و هم دوقطر آن باهم برابر باشند»، تعریف شما نمی‌تواند شامل لوزی‌هایی شود که مربع نیستند، یعنی قطرهای برابر ندارند.

در منطق قدیم، دو ویژگی (۴ و ۵) را، شرط‌های مانع و جامع برای تعریف می‌گفتند. یعنی تعریف باید مانع ورود غیرخود و جامع همه آن‌ها که از خود است، باشد. و حالا می‌فهمیم که: چرا برای «مجموعه» تعریفی وجود ندارد و چرا نباید به‌فکر پیدا کردن تعریفی برای آن باشیم!

تمرین‌ها

۱۳. مجموعه‌ای را نام ببرید که

الف) دارای ده عضو باشد؛

ب) دارای چهار عضو باشد؛

پ) دارای دو عضو باشد؛

ت) دارای یک عضو باشد؛

ث) عضوی نداشته باشد.

۱۴. مجموعه نقطه‌های مشترک یک خط راست با یک دایره را در روی

صفحه در نظر می‌گیریم. این مجموعه، چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

۱۵. مجموعه نقطه‌های مشترک دو دایره، چند عضو دارد؟

۱۶. مجموعه نقطه‌های برخورد دو خط راست چند عضو دارد؟

۱۷. آیا مجموعه تهی، همان مجموعه $\{0\}$ است؟

۱۸. آیا ۱ با $\{1\}$ فرق دارد؟

۱۹*. آیا مجموعه‌ای می‌تواند عضو خودش باشد؟

۲۰. آیا مجموعه‌های زیر برابرند؟

$$\left\{ \frac{1+4}{10-5}, \frac{4}{2}, 3 \right\} \text{ و } \{1, 2, 3\} \text{ الف)}$$

ب) مجموعه مثلث‌هایی که سه ضلع برابر دارند، و مجموعه مثلث‌هایی که سه زاویه برابر دارند؛

پ) مجموعه عددهای بخش‌پذیر بر ۱۰، و مجموعه عددهایی که به صفر ختم شده‌اند؛

ت) مجموعه عددهای بخش‌پذیر بر ۴ و بر ۶، و مجموعه عددهای بخش‌پذیر بر ۲۴؛

ث) $\{83, 89, 91, 97\}$ ، و مجموعه عددهای اول بین ۸۰ و ۱۰۰؛

ج) مجموعه قمرهای طبیعی زهره، و مجموعه چرخ‌های مربع‌شکل؛

$$\left\{ \frac{1}{5}, 11 \right\} \text{ و } \left\{ 0.35, \frac{7}{20}, 11 \right\} \text{ چ)}$$

۲۱. آیا عددهای $\frac{1}{4}$ ، π ، 0.25 ، یک مجموعه سه‌عضوی تشکیل

می‌دهند؟

۲۲. مجموعه همه کسرهایی را بنویسید که برای هریک از آنها، این شرط‌ها برقرار باشند.

اول، صورت و مخرج هر کسر یکرقمی باشد؛

دوم، مقدار هر کسر از واحد کوچکتر باشد؛

سوم، کسرها ساده‌نشده باشند.

این مجموعه چند عضو دارد؟ آیا می‌توانید عضوهای این مجموعه را به ردیف صعودی بنویسید، یعنی از کوچکترین کسر آغاز کنید و به بزرگترین کسر برسید؟

۲۳. اگر مجموعه کسرهای بزرگتر از واحد را در نظر بگیریم که قابل ساده‌شدن نباشند و صورت و مخرج آنها عددهای یکرقمی باشد، ۸ عضو کمتر از مجموعه تمرین ۲۲ پیدا می‌کند. چرا؟

*۲۴. عضوهای مجموعه‌های A ، B و C را مشخص کنید:

$$A = \{x | x - 2 = 5\}; \quad B = \{x | x^2 = 4\};$$

$$C = \{x | x \text{ حرفی است از واژه «دوستی»}\}$$

*۲۵. کدامیک از این مجموعه‌ها، یک مجموعه تهی است:

$$M = \{x | x^2 + 1 = 0\}; \quad B = \{x | x + 1 = 1\}$$

۲۶. اگر داشته باشیم $F = \{1, 0\}$ ، کدامیک درست است:

الف) $\{0\} \in F$ ؛ ب) $\emptyset \subset F$ ؛

پ) $\{0\} \subset F$ ؛ ت) $0 \in F$ ؛

ث) $\{0, 1\} \subset F$ ؛ ج) $\{0, 1\} \in F$ ؛

۲۷. $\{\{0, 1\}\}$ چه معنایی دارد؟

۲۸. کدامیک از این رابطه‌ها درست و کدامیک نادرست است؟

الف) $\{2\} \subset \{4\}$ ؛ ب) $2 \in \{4\}$ ؛

پ) $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ ؛

ت) $\{1, 2\} \subset \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ ؛

ث) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, 3, 4\}$ ؛

ج) $\{1, 2\} \subset \{\{1, 2\}, 3, 4\}$.

۲۹. کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\phi \in \{\phi\}$ ؛ ب) $\phi \subset \{\phi\}$ ؛

پ) $\phi \in \{\phi, \{\phi\}\}$ ؛ ت) $\phi \subset \{\phi, \{\phi\}\}$ ؛

ث) $\{\phi\} \in \{\phi, \{\phi\}\}$ ؛ ج) $\{\phi\} \subset \{\phi, \{\phi\}\}$ ؛

چ) $\{\{\phi\}\} \subset \{\phi, \{\phi\}\}$ ؛

۳۰۰. می‌دانیم:

$$A = \{x | x^2 + 3 = 0\} \text{ و } B = \{x | x = 2\}$$

آیا $A \subset B$ ؟

۳۱. کدام درست و کدام نادرست است؟

الف) $\{1, 4, 3\} = \{3, 4, 1\}$ ؛

ب) $\{1, 2, 1, 3, 1, 2\} = \{1, 2, 3\}$ ؛

پ) $\{4\} \in \{\{4\}\}$ ؛ ج) $\{4\} \subset \{\{4\}\}$.

۳۲. با فرض $A = \{1, 2, 3\}$ ، همه زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

۳۳. همه زیرمجموعه‌های $B = \{x, y, z\}$ را بنویسید.

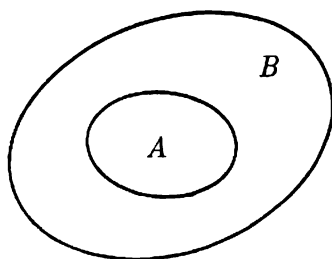
۳۴. این مجموعه‌ها را در نظر می‌گیریم (شکل‌های روی صفحه موردنظر

است):

مجموعهٔ لوزی‌ها؛ مجموعهٔ همهٔ چهارضلعی‌ها؛

مجموعهٔ همهٔ مربع‌ها؛ مجموعهٔ همهٔ دوزنقه‌ها؛

مجموعهٔ همهٔ متوازی‌الاضلاع‌ها؛ مجموعهٔ همهٔ مستطیل‌ها.



شکل ۸

کدام مجموعه، زیرمجموعه دیگری است؟

۳۵. A یک مجموعه است و می‌دانیم $A \subset \emptyset$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳۶. باتوجه به شکل ۸، کدام درست است: $A \in B$ یا $A \subset B$ ؟

۳۷. A مجموعه عددهای طبیعی، B مجموعه عددهای زوج و C

مجموعه عددهای فرد است. چه رابطه‌ای بین این مجموعه‌ها وجود دارد؟

*۳۸. برای مجموعه

$$M = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$$

که دارای n عضو است، چند زیرمجموعه می‌توان نوشت؟

۳۹. M را مجموعه چندضلعی‌ها، A را مجموعه همه چهارضلعی‌ها،

B را مجموعه همه متوازی‌الاضلاع‌ها، C را مجموعه همه مستطیل‌ها، D را

مجموعه همه مربع‌ها و F را مجموعه همه مثلث‌ها می‌گیریم. این مجموعه‌ها

را به‌یاری نمودار ون نشان دهید.

۲. عمل با مجموعه‌ها

۱۴. اجتماع دو مجموعه

گمان می‌کنم، این «چستان» را شنیده باشید که: «سه سیب، بین دو دختر و دو مادر تقسیم کردند، به هر کدام، یک سیب کامل رسید. چطور ممکن است؟» حل چستان ساده است: در این جا، تنها با سه نفر سروکار داریم، دختر، مادر و مادر بزرگ. مادر، نسبت به دختر، مادر است و، نسبت به مادر بزرگ، دختر؛ پس «دو دختر، یعنی دختر و مادر» و «دو مادر یعنی مادر و مادر بزرگ» روی هم سه نفر.

اگر دو مجموعه را در نظر بگیریم: مجموعه اول (که آن را A می‌نامیم)، شامل «مادر و مادر بزرگ» و مجموعه دوم (که آن را B می‌نامیم) شامل «دختر و مادر»:

$$A = \{ \text{مادر و مادر بزرگ} \} \text{ و } B = \{ \text{مادر و دختر} \}$$

مادر، در هر دو مجموعه حضور دارد، پس وقتی جمع آن‌ها را در نظر بگیریم، باید تنها یکبار از «مادر» اسم ببریم. می‌گویند، اجتماع این دو مجموعه سه عضو دارد و این طور می‌نویسند:

$$A \cup B = \{ \text{مادر بزرگ و مادر و دختر} \}$$

$\cup$ ، نماد عمل اجتماع است و گاهی به آن «ناو» هم می‌گویند: $A \cup B$ ، یعنی اجتماع A و B یا « A ناو B ».

به این ترتیب، می‌توان تعریف زیر را پذیرفت:

اجتماع دو مجموعه A و B ، مجموعه‌ای است که از عضوهای A و B پدید آمده باشد، به زبان دیگر:

هر عضو مجموعه $A \cup B$ ، یا عضو مجموعه A است، یا عضو مجموعه B و یا عضو هردوی آنها؛ برعکس، هر عضو A و هر عضو B ، عضوی از مجموعه $A \cup B$ است.

از تعریف اجتماع، بلافاصله، چند نتیجه به دست می آید:

نتیجه ۱. در مجموعه‌های با پایان تعداد عضوهای $A \cup B$ ، یا برابر است با مجموع تعداد عضوهای دو مجموعه A و B ، و یا از این مجموع کمتر است.

در واقع، اگر دو مجموعه A و B ، عضو مشترکی نداشته باشند، تعداد عضوهای $A \cup B$ ، با مجموع تعداد عضوهای A و B برابر می شود:

$$A = \{2, 4, 6\} \text{ و } B = \{1, 3, 5\};$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مجموعه‌های A و B ، هر کدام سه عضو و مجموعه $A \cup B$ ، ۶ عضو دارد. در این حالت، مجموعه‌های A و B را، جدا از هم گیرند:

دو مجموعه، وقتی جدا از هم هستند که، عضو مشترکی نداشته باشند. ولی، اگر دو مجموعه با پایان، جدا از هم نباشند، یعنی عضو یا عضوهای مشترک داشته باشند، آن وقت، تعداد عضوهای $A \cup B$ ، از مجموع تعداد عضوهای A و B کمتر می شود:

$$A = \{2, 4, 8, 16\} \text{ و } B = \{2, 4, 6, 8\};$$

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 16\}$$

مجموعه A ، ۴ عضو و مجموعه B ، ۴ عضو دارد؛ ولی مجموعه $A \cup B$ ، بیش از ۵ عضو ندارد؛ عضوهای ۲، ۴ و ۸، در دو مجموعه A و B مشترک بود و، بنابراین، در مجموعه $A \cup B$ تکرار نشدند.

نتیجه ۱، نخستین اختلاف، «عمل اجتماع» در مجموعه‌ها، با «عمل جمع» در حساب است.

ولی این، تنها اختلاف «اجتماع» با «جمع» نیست. در حساب، اگر عددی را با خودش جمع کنیم، دوبرابر می‌شود، ولی در مجموعه‌ها:
نتیجه ۲. اجتماع یک مجموعه با خودش، برابر همان مجموعه است:

$$A \cup A = A$$

که درستی آن روشن است. همچنین
نتیجه ۳. اگر B زیرمجموعه‌ای از مجموعه A باشد، آن وقت، اجتماع دو مجموعه A و B ، برابر مجموعه A می‌شود:
اگر $B \subset A$ ، آن وقت $A \cup B = A$
یادداشت. در ریاضیات، وقتی از فرضی یا حکمی به نتیجه‌ای برسند، بین فرض و نتیجه، نماد $\Rightarrow$ را می‌گذارند که می‌توان آن را به معنای «نتیجه می‌دهد، گرفت»:

$$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$$

یعنی، فرض $B \subset A$ ، نتیجه می‌دهد $A \cup B = A$. روشن است که در این جا، عکس این رابطه هم درست است، یعنی از فرض $A \cup B = A$ می‌توان نتیجه گرفت: $B \subset A$:

$$A \cup B = A \Rightarrow B \subset A$$

وقتی رابطه «نتیجه‌گیری» دوطرفه باشد، می‌توان نماد $\Leftrightarrow$ را به کار برد:

$$B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$$

یعنی، اگر سمت چپ درست باشد، سمت راست درست است و برعکس.

نماد $\Rightarrow$ را نماد «اگر ... آنگاه ...» هم می‌گویند. یعنی، به جای آن‌که بنویسید:

اگر $B \subset A$ ، آنگاه $A \cup B = A$ می‌نویسند

$$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$$

در این صورت، نماد $\Leftrightarrow$ را «اگر ... آنگاه ... و برعکس» می‌نامند.

□

ولی از تعریف اجتماع، نتیجه‌های دیگری هم می‌توان گرفت که با ویژگی‌های عمل جمع (در حساب) شباهت دارد.

نتیجه ۴. A هر مجموعه‌ای باشد، در اجتماع با مجموعه «تهی» برابر A می‌شود:

$$A \cup \phi = A$$

در واقع، در این جا، مجموعه «تهی»، نقش عدد صفر را در «جمع» به عهده دارد: مجموع هر عدد با صفر، برابر همان عدد است؛ و اجتماع هر مجموعه با ϕ ، برابر همان مجموعه است. نتیجه ۵. عمل اجتماع، دارای ویژگی جابه‌جایی است، یعنی

$$A \cup B = B \cup A$$

(شبه همین ویژگی در حساب: $a + b = b + a$).

نتیجه ۶. عمل اجتماع مجموعه‌ها، دارای ویژگی شرکت‌پذیری است، یعنی

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

و بنابراین، می‌توان اجتماع سه مجموعه را به صورت

$$A \cup B \cup C$$

نوشت و عمل‌ها را، به‌دیف (چه از چپ به‌راست و چه از راست به‌چپ) در نظر گرفت.

این ویژگی هم، با ویژگی نظیر خود در جمع شباهت دارد:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

که می‌توان آن را به صورت $a + b + c$ نوشت.

مثال ۱. اجتماع سه مجموعه A و B و C را پیدا کنید، به شرطی که

$$A = \{2, 3, 5, 7\}; \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\};$$

$$C = \{2, 4, 6, 8\}$$

حل. داریم:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

در شکل ۹، پاسخ مساله، به کمک نمودار ون داده شده است.

مثال ۲. ثابت کنید $A \subset A \cup B$ و $B \subset A \cup B$.

حل. چون $A \cup B = B \cup A$ ، کافی است یکی از دو حکم را ثابت

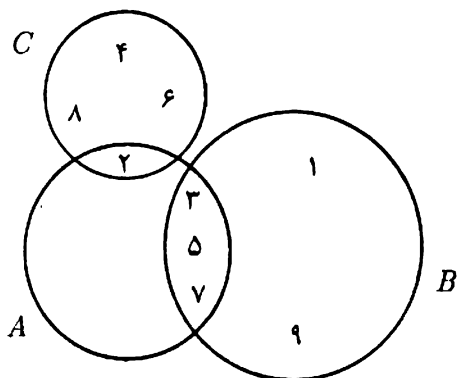
کنیم: A زیرمجموعه‌ای از مجموعه $A \cup B$ است. باید ثابت کنیم، اگر

$x \in A$ ، آن وقت $x \in A \cup B$. وقتی x عضو A باشد، می‌توانیم بگوییم:

x عضو A یا عضو B است و، در این صورت عضو $A \cup B$ خواهد بود.

مثال ۳. ثابت کنید، از $A \cup B = \phi$ ، نتیجه می‌شود: $A = \phi$ و

$$B = \phi$$



شکل ۹

حل. می‌دانیم $A \subset (A \cup B)$ (مثال ۲ را ببینید)؛ بنابراین $A \subset \phi$.
از طرف دیگر، مجموعه تهی، زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است، یعنی $\phi \subset A$. پس $A = \phi$. همین استدلال را درباره B هم می‌توان انجام داد.

مثال ۴. پاره‌خط راست MN را به طول ۲ سانتی‌متر رسم کرده‌ایم. مجموعه رأس‌های همه مثلث‌های متساوی‌الساقینی را در نظر می‌گیریم که قاعده آن‌ها، پاره‌خط راست MN باشد و مساحت هریک از آن‌ها، کمتر از یک سانتی‌متر مربع نشود. این مجموعه، از اجتماع دو مجموعه دیگر به دست می‌آید. کدام دو مجموعه؟

حل. چون طول قاعده هریک از این مثلث‌ها برابر ۲ سانتی‌متر است، باید ارتفاع هرکدام، طولی برابر یا بزرگتر از ۱ سانتی‌متر داشته باشد، تا مساحت مثلث از ۱ سانتی‌متر مربع کمتر نشود. بنابراین، مجموعه رأس‌های این مثلث‌ها، اجتماع دو مجموعه جدا از هم است: یکی مجموعه نقطه‌های واقع بر نیم‌صفحه α (شکل ۱۰) در بالای پاره‌خط راست MN ، به نحوی که مرز آن به فاصله یک سانتی‌متر از MN باشد؛ دیگری مجموعه نقطه‌های



$\overline{MN}$



شکل ۱۰



$\overline{MN}$



شکل ۱۱

روی نیم صفحه β واقع در پایین پاره خط است MN ، به نحوی که مرز آن از MN به فاصله ۱ سانتی متر باشد. می توان مجموعه رأس های این مثلث ها را، اجتماعی از دو مجموعه دیگر دانست: اجتماع دو دسته نیم خط راست عمود بر MN ، به نحوی که آغاز هریک از نیم خط های راست، به فاصله ۱ سانتی متری پاره خط راست MN واقع باشند؛ این دو مجموعه نیم خط های راست، در دو طرف پاره خط راست MN واقع اند. روی (شکل ۱۱)، برخی از نیم خط های راست رسم شده اند.

مثال ۵. در شهری، روزنامه های a و b منتشر می شوند. درباره علاقه مندان به این دو روزنامه، از ۸۰۰ نفر پرسیدند. معلوم شد ۴۳۰ نفر

روزنامه a را می‌خوانند و ۲۲۰ نفر، روزنامه b را. درضمن، روشن شد، ۱۸۰ نفر به هردو روزنامه علاقه‌مندند و هردو را می‌خوانند. از این ۸۰۰ نفر، چند نفر هیچ‌کدام از روزنامه‌های a و b را نمی‌خوانند؟
حل. دو مجموعه درنظر می‌گیریم:

$$A = \{ \text{علاقه‌مندان روزنامه } a \} \text{ و } B = \{ \text{علاقه‌مندان روزنامه } b \}$$

این دو مجموعه، جدا از هم نیستند، زیرا ۱۸۰ نفر به هردو روزنامه علاقه‌مندند. بنابراین (باتوجه به نتیجه ۱)، تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B$ ، از مجموع تعداد عضوهای دو مجموعه A و B ، به‌اندازه ۱۸۰ عضو کمتر است:

$$A = 430 = \text{تعداد عضوهای مجموعه } A;$$

$$B = 220 = \text{تعداد عضوهای مجموعه } B$$

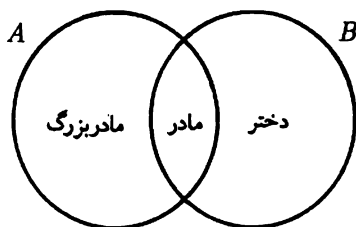
$$180 = \text{تعداد عضوهای مشترک دو مجموعه } A \text{ و } B$$

$$\begin{aligned} A \cup B &= (430 + 220) - 180 = \\ &= 650 - 180 = 470 \end{aligned}$$

یعنی از ۸۰۰ نفر، تنها ۴۷۰ نفر روزنامه می‌خوانند (یا روزنامه a ، یا روزنامه b و یا هردو)، پس بقیه افراد، روزنامه‌ای نمی‌خوانند.

$$800 - 470 = 330$$

یادداشت. فقط یادآوری می‌کنیم که گاهی، بعضی از نویسندگان کتاب‌های ریاضی، اجتماع را حاصل جمع منطقی نامیده‌اند. این اصطلاح، بیشتر مربوط به «منطق ریاضی» است، ولی منظور از آن، همان اجتماع دو یا چند مجموعه است.



شکل ۱۲

همچنین، گاهی برای اجتماع، به جای نماد $\cup$ ، از نماد $+$ (نماد جمع) استفاده می‌کنند.

این یادداشت را به این منظور آوردیم که، اگر درجایی، ضمن بحث دربارهٔ مجموعه‌ها، به اصطلاح «حاصل جمع منطقی» و یا نماد $+$ برخورد کردید، گمراه نشوید، والا در این کتاب، از آن‌ها استفاده نخواهیم کرد.

۲.۴. اشتراک دو مجموعه

به همان چيستانِ «تقسیم سه سیب بین دو مادر و دو دختر» برگردیم. در آن‌جا با دو مجموعه A و B سروکار داشتیم که هر کدام دو عضو داشت:

$$A = \{ \text{مادر} , \text{مادر بزرگ} \} \text{ و } B = \{ \text{دختر} , \text{مادر} \}$$

ولی عضو مادر در دو مجموعه مشترک بود. این وضع را در (شکل ۱۲)، با نمودار وِن نشان داده‌ایم. عضو «مادر» را، اشتراک دو مجموعه A و B گویند:

اشتراک دو مجموعه A و B ، خودش یک مجموعه است و، عضوهای آن، آن‌هایی هستند که هم عضو مجموعه A باشند و هم عضو مجموعه B . عمل اشتراک را با نماد $\cap$ نشان می‌دهند. در این مثال

$$A \cap B = \{ \text{مادر} \}$$

به چند صفحه قبل و مثال ۱ (شکل ۹) مراجعه کنید. در آن جا با سه مجموعه سروکار داشتیم:

$$A = \{۲, ۳, ۵, ۷\}; \quad B = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\};$$

$$C = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$$

با تعریفی که برای «اشتراک دو مجموعه» دیدیم، به سادگی روشن می شود که

$$A \cap B = \{۳, ۵, ۷\} \text{ و } A \cap C = \{۲\};$$

$$B \cap C = \phi$$

مثال ۶. این مجموعه ها داده شده اند:

$$A = \{a, b, c, d\}; \quad B = \{a, b, e\};$$

$$C = \{b, c, f, g, h\}$$

این مجموعه ها را روی نمودار ون نشان دهید و $B \cap C$ ، $A \cap C$ ، $A \cap B$ و $A \cap B \cap C$ را پیدا کنید.

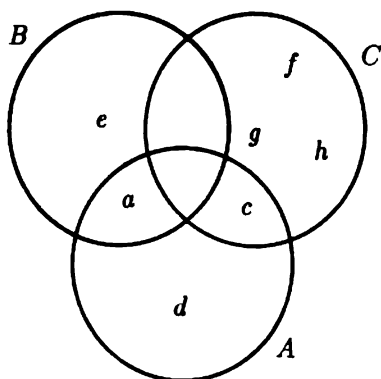
حل. روی شکل ۱۳، همه چیز دیده می شود:

$$A \cap B = \{a, b\}; \quad A \cap C = \{b, c\};$$

$$B \cap C = \{b\}; \quad A \cap B \cap C = \{b\}$$

از تعریف اشتراک دویا چند مجموعه هم، می توان نتیجه هایی به دست آورد:
نتیجه ۱. اشتراک دارای ویژگی جابه جایی است، یعنی

$$A \cap B = B \cap A$$



شکل ۱۳

نتیجه ۲. اشتراک دارای ویژگی شرکت‌پذیری است، یعنی

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

همین ویژگی شرکت‌پذیری، به‌ما اجازه می‌دهد، از پرانتز صرف‌نظر کنیم و بنویسیم: $A \cap B \cap C$ ؛ همان‌گونه که در مثال ۶ دیدیم.

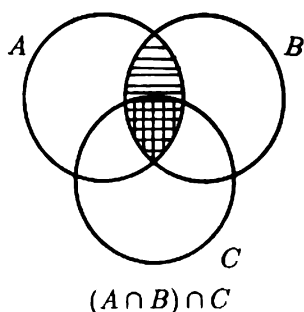
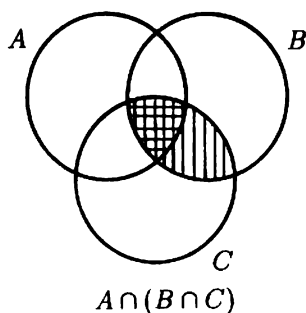
درستی نتیجه‌های ۱ و ۲ روشن است؛ باوجوداین، درستی نتیجه ۲ را در شکل ۱۴ روی نمودار ون نشان داده‌ایم.

در این شکل $A \cap B$ با هاشور افقی، $B \cap C$ با هاشور قائم و $A \cap B \cap C$ با هاشور دوگانه نشان داده شده‌است.

* از حساب و جبر می‌دانیم، جمع نسبت به ضرب، دارای ویژگی پخش‌پذیری است، یعنی

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

همین ویژگی در مجموعه‌ها هم وجود دارد:



شکل ۱۴

*نتیجه ۴. اشتراک، نسبت به اجتماع دارای ویژگی پخش است، یعنی

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (۱)$$

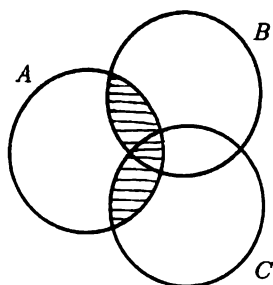
باید ثابت کنیم، اگر x عضوی از مجموعه سمت چپ برابری باشد، حتماً عضوی از مجموعه سمت راست برابری است و برعکس.

فرض می‌کنیم x عضو مجموعه $A \cap (B \cup C)$ باشد. در این صورت، x عضو مشترک دو مجموعه A و $B \cup C$ است؛ در ضمن عضو مجموعه $B \cup C$ یعنی یا عضو B یا عضو C (یا عضو هر دو). پس x عضو مشترک A و B یا عضو مشترک A و C است. و این همان توضیح مجموعه سمت راست برابری (۱) است. به همین ترتیب، روشن می‌شود، اگر x عضو مجموعه سمت راست برابری (۱) باشد، در ضمن عضو مجموعه سمت چپ برابری (۱) هم خواهد بود. در شکل ۱۵، دو مجموعه سمت چپ و سمت راست برابری (۱) با نمودار ون نشان داده شده است.

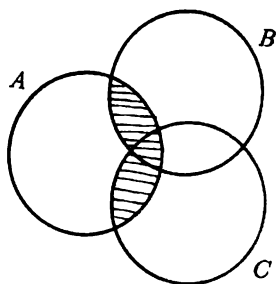
مثال ۷. اگر داشته باشیم

$$A = \{a, b, c\};$$

$$B = \{b, c, d\}; \quad C = \{e, f\}$$



$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$



$$A \cap (B \cup C)$$

شکل ۱۵

مجموعه‌های $A \cap B \cap \phi$ و $A \cap B \cap C$ ، $B \cap C$ ، $A \cap C$ ، $A \cap B$ را تشکیل دهید.

پاسخ

$$A \cap B = \{b, c\}; \quad A \cap C = \phi, \quad B \cap C = \phi$$

$$A \cap B \cap C = \phi; \quad A \cap B \cap \phi = \phi$$

نتیجه ۴. اگر $B \subset A$ ، آن وقت $A \cap B = B$

نتیجه ۵. همیشه $A \cap \phi = \phi$

نتیجه ۶. همان‌طور که در مثال ۷ دیدیم، اشتراک دو مجموعه جدا از هم، یک مجموعه تهی است.

باز هم چند مثال:

مثال ۸. ثابت کنید: $(A \cap B) \subset B$ و $(A \cap B) \subset A$ و از آن‌جا

نتیجه بگیرید $A \cap A = A$.

حل. $x \in (A \cap B)$ ، به معنای آن است که x عضو مشترک دو

مجموعه A و B است، یعنی $x \in A$ و $x \in B$. بنابراین، هر عضو مجموعه

$A \cap B$ به ناچار عضو مجموعه A است، یعنی $A \cap B$ زیرمجموعه‌ای

از A است؛ همچنین، هر عضو $A \cap B$ باید عضوی از B باشد، یعنی $(A \cap B) \subset B$.

برای اثبات $A \cap A = A$ ، باید ثابت کنیم $(A \cap A) \subset A$ و $A \subset (A \cap A)$ رابطه اول را دربخش اول همین مساله ثابت کردیم: $(A \cap A) \subset A$. برای اثبات رابطه دوم گوئیم، اگر $x \in A$ ، آنوقت می‌توانیم تکرار کنیم: x هم عضو A است و هم عضو A ، یعنی عضو $A \cap A$ است، پس $A \subset (A \cap A)$.

مثال ۹. M را مجموعه مرجع و A' را متمم مجموعه A نسبت به M و، همچنین B' را متمم B و C' را متمم C نسبت به مجموعه مرجع M می‌گیریم. اگر داشته باشیم

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\};$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}; \quad B = \{2, 4, 6, 8\};$$

$$C = \{3, 4, 5, 6\}$$

مطلوب است تعیین A' ، B' ، $(A \cap C)'$ ، $(A \cup B)'$ و $(A')'$.
 حل. پاسخ. $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ؛ $B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ؛
 چون $A \cap C = \{3, 4\}$ پس

$$(A \cap C)' = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

چون $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ پس
 $(A \cup B)' = \{5, 7, 9\}$ ؛ چون $A' = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ پس
 $(A')' = \{1, 2, 3, 4\} = A$.

مثال ۱۰. از ۷۳ نفر دانش‌آموز سال سوم دبیرستان، ۱۸ نفر در انجمن ریاضی، ۲۴ نفر در انجمن فیزیک و ۲۶ نفر در انجمن موسیقی شرکت کرده‌اند و ۲۳ نفر عضو هیچ‌کدام از این انجمن‌ها نیستند. از کسانی که در

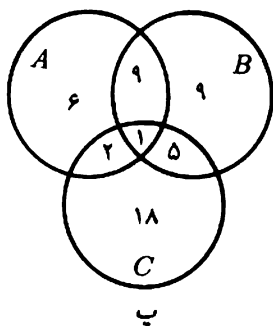
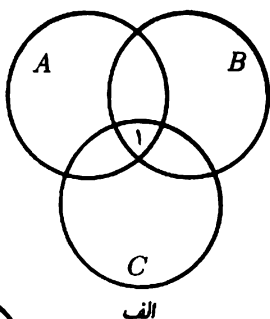
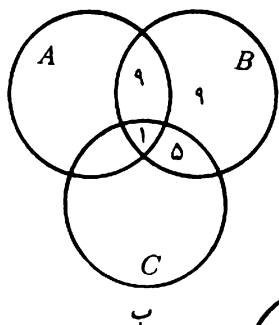
انجمن فیزیک کار می‌کنند، ۱۰ نفر در انجمن ریاضی و ۶ نفر در انجمن موسیقی هم شرکت می‌کنند؛ ولی تنها یک نفر در هر سه انجمن عضو است. چند دانش‌آموز در هر دو انجمن ریاضی و موسیقی عضویت دارند؟

حل. مجموعه دانش‌آموزان انجمن ریاضی را A ، مجموعه دانش‌آموزان انجمن فیزیک را B و مجموعه دانش‌آموزان انجمن موسیقی را C می‌نامیم. تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B \cup C$ برابر ۵۰ نفر است (زیرا از ۷۳ دانش‌آموز، ۲۳ نفر در هیچ انجمنی عضویت ندارند. در ضمن می‌دانیم، تعداد عضوهای مجموعه $A \cap B$ برابر ۱۰، تعداد عضوهای مجموعه $B \cap C$ برابر ۶ و تعداد عضوهای مجموعه $A \cap B \cap C$ برابر واحد است. می‌خواهیم تعداد عضوهای مجموعه $A \cap C$ را پیدا کنیم.

در این گونه مساله‌ها، ساده‌ترین روش حل، استفاده از نمودار ون است. سه دایره دویه دو متقاطع (یکی نماینده انجمن ریاضی، دیگری نماینده انجمن فیزیک و سومی نماینده انجمن موسیقی: A ، B و C) رسم می‌کنیم.

ابتدا، عدد ۱ را در بخش مشترک سه دایره می‌گذاریم (شکل ۱۶ الف)، زیرا تعداد عضوهای اشتراک سه مجموعه A و B و C برابر واحد است. حالا، بخش مشترک دو مجموعه A و B را در نظر می‌گیریم که خود شامل دو قسمت است و در یکی از آن‌ها (بخش مشترک سه دایره) عدد ۱ وجود دارد؛ بنابراین باید در دیگری عدد ۹ را قرار دهیم (زیرا تعداد عضوهای مجموعه $A \cap B$ برابر ۱۰ بود). به همین ترتیب، چون تعداد عضوهای مجموعه $B \cap C$ برابر ۶ است، در بخش مشترک دوم دو دایره B و C ، عدد ۵ را قرار می‌دهیم (شکل ۱۶-ب).

اگر دو انجمن ریاضی و موسیقی، عضو مشترک نداشته باشند، آن وقت ۸ عضو باقی‌مانده انجمن ریاضی و ۲۰ عضو باقی‌مانده انجمن موسیقی با ۲۴ عضو انجمن فیزیک، روی هم ۵۲ نفر می‌شوند که ۲ نفر از تعداد کل دانش‌آموزان ما (که در انجمن‌ها شرکت دارند) بیشتر است. بنابراین ۲ نفر در



شکل ۱۶

هر دو انجمن ریاضی و موسیقی (به جز یک نفری که در هر سه انجمن شرکت می‌کرد) عضویت دارند. طرح کامل مساله در شکل ۱۶-پ داده شده است.

* یادداشت. ۱) نماد اشتراک، یعنی $\cap$ را «تاق» هم می‌نامند؛ مجموعه $A \cap B$ را می‌خوانند: «اشتراک دو مجموعه A و B » یا « A تاق B ».

۲) «اشتراک دو مجموعه را «برخورد» یا «مقطع» آن‌ها هم نامیده‌اند.

۳) همچنین اشتراک دو مجموعه A و B را، «حاصل ضرب منطقی» مجموعه‌های A و B می‌گویند و به صورت $A \cdot B$ نشان می‌دهند.

ولی در این کتاب، همه جا از نماد $\cap$ و اصطلاح «اشتراک» استفاده کرده‌ایم. یادآوری نمادها و اصطلاح‌های دیگر، برای این است که، اگر در کتابی با آن‌ها برخوردید، سردرگم نشوید.

۳۴. تفاضل دو مجموعه

بازپرس که دربارهٔ یک جنایت تحقیق می‌کرد، به این نتیجه رسید که، جنایت‌کار، باید یکی از ۵ نفر a, b, c, d یا e باشد. ولی متوجه شد در زمان جنایت، b و c و e در زندان بوده‌اند. بنابراین a و d را احضار کرد و تحقیق خود را روی آن‌ها متمرکز کرد.

بازپرس، از عمل تفریق مجموعه‌ها استفاده کرد و تحقیق را روی دو مجموعه انجام داد. اگر مجموعهٔ افراد مظنون را A و مجموعهٔ زندانیان را B بنامیم، بازپرس، همهٔ عضوهای مشترک دو مجموعهٔ A و B را از A کنار می‌گذارد و دایرهٔ عمل خود را کوچکتر می‌کند، یعنی به جای ۵ نفر، به ۲ نفر مظنون می‌شود.

$$A = \{a, b, c, d, e\};$$

$$B = \{\dots, b, c, e, \dots\};$$

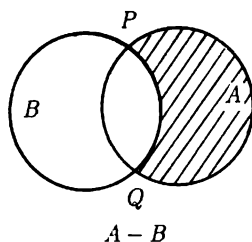
$$A - B = \{a, d\}$$

تفاضل دو مجموعهٔ A و B ، عبارت است از مجموعهٔ $A - B$ که، عضوهای آن، عبارتند از همهٔ عضوهایی از مجموعهٔ A که عضو مجموعهٔ B نیستند.

توجه کنیم، برای کم کردن مجموعهٔ B از مجموعهٔ A ، لازم نیست B از A «کوچکتر» باشد (یعنی تعداد کمتری عضو داشته باشد) و مثلاً لازم نیست B زیرمجموعه‌ای از A باشد: کم کردن B از A ، یعنی بیرون کردن عضوهای مشترک A و B ، از مجموعهٔ A :

$$A - B = A - (A \cap B)$$

تفاضل $A - B$ ، روی نمودار وِن روی شکل ۱۷ نشان داده شده است (بخش هاشور خوردهٔ مجموعهٔ A). البته نقطه‌های واقع بر کمان PQ را نباید جزو



شکل ۱۷

مجموعه $A - B$ به شمار آورد. اگر A ، مجموعه دانش‌آموزان سال اول دبیرستان شما و B ، مجموعه دانش‌آموزان تیم والیبال همه دبیرستان باشد، $A - B$ به معنای مجموعه دانش‌آموزانی از سال اول دبیرستان است که عضو تیم والیبال مدرسه نیستند.

در حالت خاص، وقتی B زیرمجموعه‌ای از A باشد، $A - B$ ، همان متمم مجموعه B نسبت به مجموعه A می‌شود. اگر متمم مجموعه B نسبت به مجموعه A را با نماد B'_A نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$B \subset A \Leftrightarrow A - B = B'_A$$

دوطرفه بودن این رابطه روشن است، یعنی اگر تفاضل $A - B$ برابر متمم B نسبت به مجموعه A باشد، به معنای آن است که B زیرمجموعه‌ای از A است. مثلاً اگر A را مجموعه همه لوزی‌ها و B را مجموعه همه مربع‌ها بگیریم، آن وقت $A - B$ ، شامل لوزی‌هایی است که قطرهای نابرابر دارند و، این لوزی‌ها، همان متمم مجموعه مربع‌ها نسبت به مجموعه همه لوزی‌ها است. یا اگر A را مجموعه عددهای طبیعی و B را مجموعه عددهای فرد طبیعی بگیریم، چون $A - B$ برابر مجموعه عددهای زوج طبیعی است، پس نتیجه می‌گیریم که $B \subset A$.

مثال ۱۱. اگر بدانیم:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}; \quad B = \{2, 4, 6, 8\}; \quad C = \{3, 4, 5, 6\}$$

مجموعه‌های $A - B$ ، $C - A$ ، $B - C$ ، $B - A$ و $B - B$ را پیدا کنید.

پاسخ.

$$A - B = \{1, 3\}; \quad C - A = \{5, 6\};$$

$$B - C = \{2, 8\}; \quad B - A = \{6, 8\}; \quad B - B = \phi$$

مثال ۱۲. ثابت کنید:

$$(A - B) \cap B = \phi \quad (\text{الف } (A - B) \subset A, \text{ ب})$$

حل. الف) اگر x عضوی از مجموعه $A - B$ باشد، بنابه تعریف باید داشته باشیم: $x \in A$ و $x \notin B$ ، یعنی به ویژه $x \in A$. به این ترتیب، $x \in (A - B)$ به معنای $x \in A$ است و در نتیجه $(A - B) \subset A$.
ب) شبیه حالت الف) داریم:

$$x \in (A - B) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$$

بنابراین، چون عضو x باید با $x \in B$ و $x \notin B$ سازگار باشد، داریم.

$$(A - B) \cap B = \phi$$

مثال ۱۳. A' متمم مجموعه A است. ثابت کنید:

$$B - A' = B \cap A$$

حل. $x \in (B - A')$ به معنای $x \in B$ و $x \notin A'$ است و، شرط اخیر به معنای $x \in B$ و $x \in A$ است (اگر یک مجموعه مرجع داشته باشیم، آنوقت برای هر مجموعه‌ای مثل A که از این مجموعه مرجع گرفته شده است، یا $x \in A$ و یا $x \in A'$ ؛ بنابراین از $x \notin A'$ نتیجه می‌شود $x \in A$).

ولی وقتی x عضو هر دو مجموعه B و A باشد، به معنای آن است که عضو مجموعه اشتراک آنها، یعنی $B \cap A$ است.

برعکس، اگر $x \in B \cap A$ ، آنوقت $x \in B$ و $x \in A$ ؛ یعنی $x \in (B - A')$ بنابراین $x \notin A'$ و $x \in B$.

$$B - A' = B \cap A \text{ پس}$$

* یادداشت. تمامی حل این مساله را می‌توان با نمادهای ریاضی و به این صورت نوشت:

$$\begin{aligned} B - A' &= \{x | x \in B \text{ و } x \notin A'\} = \\ &= \{x | x \in B, x \in A\} = B \cap A \end{aligned}$$

و به همین ترتیب، برای عکس آن.

مثال ۱۴. اگر $M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ مجموعه مرجع و

$$A = \{a, b, c, d, e\}; \quad B = \{a, c, e, g\};$$

$$C = \{b, e, f, g\}$$

مجموعه‌های $C - B$ ، $A' - B$ ، $(A - C)'$ و $(A - B)'$ را پیدا کنید. پاسخ.

$$\begin{aligned} C - B &= \{b, f\}; \quad A' - B = \{f\}; \quad (A - C)' = \\ &= C = \{b, e, f, g\}; \quad (A - B)' = \{b, d, f, g\} \end{aligned}$$

□

بامفهوم مجموعه، ویژگی‌های آن و عمل کردن با آن آشنا شدیم. بهتر است فهرستی از این ویژگی‌ها را بیاوریم تا هم مروری بر درس‌های گذشته

باشد و هم، در صورت تردید، بتوان به آنها مراجعه کرد. حافظه، همه چیز را به سادگی در ذهن نگه نمی دارد، به همین دلیل است که واژه نامه های مختلف را درست کرده اند. این هم واژه نامه ای است از ویژگی های مجموعه ها: در این «واژه نامه»، A ، B و C مجموعه هایی دلخواه، M مجموعه مرجع آنها و ϕ مجموعه تهی است. نشانه ' به معنای متمم مجموعه است: A' ، یعنی متمم مجموعه A نسبت به مرجع M .

$$A \subset A \quad (۱)$$

$$(۲) \text{ اگر } A \subset B \text{ و } B \subset A, \text{ آن وقت } A = B.$$

$$(۳) \text{ اگر } A \subset B \text{ و } B \subset C, \text{ آن وقت } A \subset C.$$

$$(۴) \phi \subset A$$

$$(۵) A \subset M$$

$$(۶) A \cup B = B \cup A$$

$$(۷) A \cap B = B \cap A$$

$$(۸) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$(۹) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

$$(۱۰) A \cup A = A$$

$$(۱۱) A \cap A = A$$

$$(۱۲) A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(۱۳) A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(۱۴) A \cup \phi = A$$

$$(۱۵) A \cap M = A$$

$$(۱۶) A \cup M = M$$

$$(۱۷) A \cap \phi = \phi$$

$$(۱۸) \text{ اگر } A \subset B, \text{ آن وقت } A \cup B = B \text{ و برعکس.}$$

$$(۱۹) \text{ اگر } A \subset B, \text{ آن وقت } A \cap B = A \text{ و برعکس.}$$

$$A \cup A' = M \quad (20)$$

$$A \cap A' = \phi \quad (21)$$

$$M' = \phi \text{ و } \phi' = M \quad (22)$$

$$(A')' = A \quad (23)$$

$$B' \subset A' \text{ اگر } A \subset B \quad (24)$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad (25)$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (26)$$

* یادداشت. بسیاری از این رابطه‌ها را می‌توان از دیگران نتیجه گرفت. به‌ویژه می‌توان با تبدیل نماد $\subset$ به نماد $\supset$ ، نماد ϕ به نماد M و نماد $\cup$ به نماد $\cap$ و برعکس از یک رابطه، رابطه دیگری را به دست آورد. مثلاً، از این راه، رابطه ۵، نتیجه‌ای از رابطه ۴، رابطه ۷، نتیجه‌ای از رابطه ۶، رابطه ۱۳، نتیجه‌ای از رابطه ۱۲، رابطه ۱۷، نتیجه‌ای از رابطه ۱۶ و غیره است: به این ترتیب اگر تنها ۶ رابطه از a تا f را که در زیر نوشته‌ایم، بدانیم، می‌توان بقیه را از آن‌ها نتیجه گرفت:

$$A \cup B = B \cup A \quad (a)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (b)$$

$$(A' \cup B')' \cup (A' \cup B)' = A \quad (c)$$

$$A \cap B = (A' \cup B')' \quad (d)$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \quad (e)$$

$$M' = \phi, M = A \cup A' \quad (f)$$

تمرین‌ها

۴۰. مجموعه M دانش‌آموزان یک کلاس، شامل دو مجموعه جدا از هم است: A ، مجموعه دانش‌آموزانی که با بازی شطرنج آشنا هستند و B ، مجموعه دانش‌آموزانی که با بازی شطرنج آشنا نیستند. از این رابطه‌ها، کدام

درست و کلام نادرست است:

$$۱) M = A \Leftrightarrow B = \phi; \quad ۲) M - A = B;$$

$$۳) A \cup B = M; A \cap B = \phi$$

۴۱. ثابت کنید، اگر داشته باشیم: $A \cup B = A$ و $B \cup A = B$ ، آنوقت $A = B$.

۴۲. اگر داشته باشیم:

$$Q = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}; \quad R = \{۲, ۴, ۶, ۸\};$$

$$S = \{۱, ۳, ۴, ۵, ۷\}; \quad T = \{۲, ۶, ۸\}$$

مجموعه‌های زیر را پیدا کنید:

$$۱) (Q \cap R) \cup (S \cap T); \quad ۲) Q \cap R \cap S \cap T;$$

$$۳) (Q \cup R) \cap (S \cup T); \quad ۴) (R \cup T) \cap S;$$

$$۵) R \cup (T \cap S)$$

۴۳. این دو گزاره را ثابت کنید:

۱) اگر $E \cup F = E$ و $E \cap F = E$ آنوقت $E = F$ ؛

۲) اگر $F \subset E$ و $E \cap F = E$ ، آنوقت $E = F$ ؛ درضمن عکس

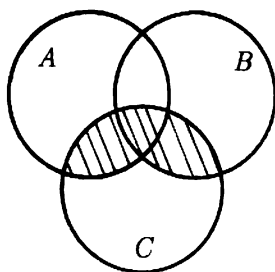
این دو گزاره هم درست است.

۴۴. این رابطه به چه معناست.

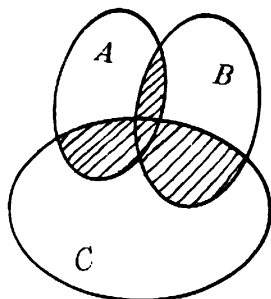
$$A \cup B = B \cap C$$

۴۵. بهیاری نمودار ون، درستی این قاعده بخشی را ثابت کنید:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

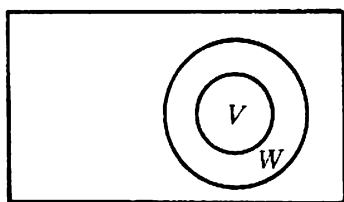


ب

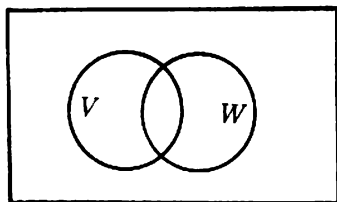


الف

شکل ۱۸



ب



الف

شکل ۱۹

۴۶. در شکل ۱۸، A و B و C ، هر کدام معرف یک مجموعه‌اند. بخش هاشورخورده، چه عمل‌هایی را معرفی می‌کند.

۴۷. می‌دانیم $A \cap B = \phi$. ثابت کنید $A \subset B'$.

۴۸. در هر کدام از نمودارهای الف و ب (شکل ۱۹)، این مجموعه‌ها را هاشور بزنید: $V' - W'$ ، $W - V$ ، $V' \cup W$ ، $V \cap W$ ، W' ، $V \cap W'$.

۴۹. به جای ؟، یکی از نمادهای $\subset$ یا $\supset$ را بگذارید:

الف) $A?(A - B)$ ؛ ب) $A?(A \cap B)$ ؛

پ) $A?(A \cup B)$ ؛ ت) $A?(B - A)$ ؛

*۵۰. برابری $A - B = A \cap B'$ ، تفاضل دو مجموعه را به کمک

«اشتراک» و «متمم» توضیح می‌دهد. دستوری پیدا کنید که اجتماع $A \cup B$ را به کمک «اشتراک» و «متمم» توضیح دهد.

*۵۱. A ، B و C ، مجموعه‌هایی از مرجع M هستند. این دو عبارت را ساده کنید:

$$X = A \cup (A' \cap B);$$

$$Y = (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap C') \cup B$$

*۵۲. بافرض $A \subset M$ ، $B \subset M$ و $C \subset M$ این دو عبارت را ساده کنید:

$$۱) Z = [C \cap (A' \cup B') \cap (A \cup C')] \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C')$$

$$۲) T = (A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C)$$

*۵۳. این دو برابری را ثابت کنید:

$$۱) (A \cup B)' = A' \cap B'; \quad ۲) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

*۵۴. بافرض $A \subset M$ ، $B \subset M$ و $C \subset M$ ، ثابت کنید:

$$(A \cap B \cap C) \cup [A \cap (B' \cup C')] \cap A' = M$$

۵۵. در شهری از آذربایجان، هرکس یا به زبان آذری صحبت می‌کند، یا به زبان فارسی و یا به هردو زبان. ۹۰ درصد ساکنان به زبان آذری و ۷۰ درصد آن‌ها به زبان فارسی حرف می‌زنند. چند درصد ساکنان این شهر به هردو زبان آذری و فارسی صحبت می‌کنند؟

۵۶. هر مستطیل را به عنوان مجموعه‌ای از نقطه‌های واقع بر محیط و درون آن می‌گیریم. اگر همه مستطیل‌های محاط در دایره (O, R) را در نظر بگیریم، اشتراک آن‌ها چه شکلی را تشکیل می‌دهد؟ اجتماع آنها چطور؟

یادداشت. دایره (O, R) یعنی دایره‌ای به مرکز نقطه O و با شعاع برابر R . در ضمن مستطیل، وقتی در یک دایره محاط است که چهار رأس آن، روی محیط دایره باشد.

*۵۷. هر مثلث را به عنوان مجموعه‌ای از نقطه‌های واقع در درون یا روی محیط آن فرض می‌کنیم. اشتراک همه مثلث‌های متساوی‌الاضلاع محاط در دایره (O, R) ، چه شکلی را می‌سازد؟ اجتماع آن‌ها چگونه؟
 *۵۸. این مجموعه‌ها را در نظر می‌گیریم (منظور از N ، مجموعه عددهای طبیعی است):

$$A = \{x | x \in N, x \leq ۸\};$$

$$B = \{x | x \in N, x \geq ۴\};$$

$$C = \{x | x \in N, x > ۳\};$$

$$D = \{x | x \in N, ۴ < x < ۵\}$$

مطلوب است $A - B, B - C, C \cup D, A \cap D, A \cup B, A \cap B$ و $C - A$.

۵۹. می‌دانیم:

$$A = \{r, s, t, u, v, w\};$$

$$B = \{u, v, w, x, y, z\};$$

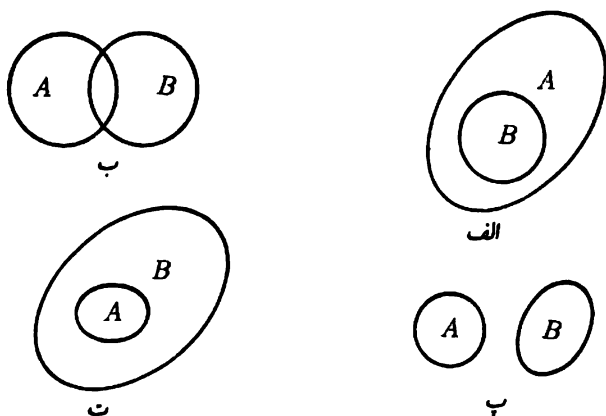
$$C = \{s, u, y, z\}; \quad D = \{u, v\};$$

$$E = \{s, u\}; \quad F = \{s\}$$

کدام یک از این مجموعه‌ها می‌تواند برابر مجموعه X باشد، به شرطی که:

الف) $X \subset A$ و $X \subset B$ ؛ ب) $X \subset B$ و $X \not\subset C$ ؛

پ) $X \not\subset A$ و $X \not\subset C$ ؛ ت) $X \subset B$ و $X \not\subset C$.



شکل ۲۰

۶۰. می‌دانیم $A \subset B$ و $B \subset C$. در ضمن $a \in A$ ، $b \in B$ ،
 $c \in C$ ، $d \notin A$ ، $e \notin B$ و $f \notin C$ ،
 کدام یک از این گزاره‌ها درست و کدام نادرست است:
 الف) $a \in C$ ؛ ب) $b \in A$ ؛ پ) $c \notin A$ ؛ ت) $d \in B$ ؛
 ث) $e \notin A$ ؛ ج) $f \notin A$.

۶۱. در شکل ۲۰، چند نمودار وِن داده شده‌است. کدام نمودار مربوط
 به کدام گزاره است: (۱)

$$(۱) A \subset B \quad (۲) A \supset B \quad (۳) A \cap B = \phi \quad (۴) A \cap B \neq \phi$$

* ۶۲. سه مجموعه A و B و C داده شده‌اند و می‌دانیم:

$$(A \cup B) \subset (A \cup C) \text{ و } (A \cap B) \subset (A \cap C)$$

چه رابطه‌ای بین دو مجموعه B و C وجود دارد؟

۳. عددهای درست

۱۵ نگاهی به تاریخ

در یکی از نوشته‌های مانده از یونان باستان، به نام «پرومته در زنجیر» با زبان «پرومته»، اسطوره افسانه‌ای، می‌خوانیم:

از رنج‌های انسان‌ها بشنوید، که درآغاز گروهی درمانده بودند. به‌آنان آموختم که بیندیشند و خرد خود را به‌کار گیرند. . . .

و سپس، راه به‌کار بردن عددها را،

که سرآمد دانستی‌هاست. . . . به آن‌ها شناساندم.

تا همین آخرها بسیاری گمان می‌کردند، «عدد» را فیلسوفی، نابغه‌ای یا دانشمندی اختراع کرد و به آدمیان یاد داد چگونه بشمارند و چگونه «حساب» اسب‌ها یا فرزندان خود را نگه دارند. بیشتر نویسندگان، «اختراع» عدد را به فیثاغورث، فیلسوف و ریاضی‌دان دوران کهن یونان نسبت می‌دادند. حتی در سال‌های پایانی سده نوزدهم، لئوپولد کرونه‌کر (Kronecker)، ریاضی‌دان بااستعداد آلمانی (۱۸۲۳-۱۸۹۱ میلادی) معتقد بود: «عددهای درست را پروردگار بزرگ آفرید، ولی عددهای دیگر، ساخته دست بشر است».

حقیقت چیست؟ عددهای طبیعی

$$1, 2, 3, 4, \dots, 10, 11, \dots, 100, 101, \dots$$

از کجا و چگونه پدید آمدند؟

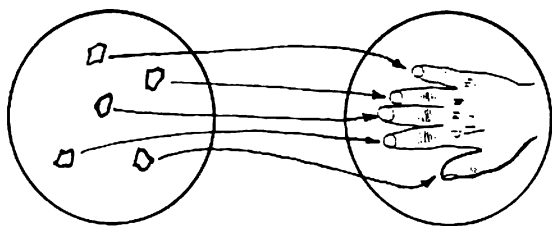
بخشی از یادداشت‌های یک جهان‌گرد پژوهشگر به نام پیکلوخو-ماکلای، درباره بومیان «گینه‌نو»، تاحدی می‌تواند موضوع را روشن کند. بومیان، از او می‌پرسند، کشتی چه موقع به این جزیره می‌آید؟ و ماکلای می‌نویسد:

... فکر کردم، وقت آن است بینم بومی‌ها چگونه می‌شمارند. چندتکه کاغذ برداشتم، آن‌ها را از سمت پهنا بریدم و به تکه‌های کوچکتری بخش کردم

... مشتی از آنها را به یکی از بومی‌ها دادم و گفتم هر تکه کاغذ نشانه ۲ روز است. همه دور بومی جمع شدند. او به یاری انگشتان خود، آغاز به شمردن کرد. ولی اندکی پریشان بود ... دیگران تکه کاغذها را از او گرفتند و به دیگری دادند. او کاغذهای بریده را گرفت و، باغروور خاصی، جایی نشست و یک نفر را هم به یاری خواست و، سپس، آغاز به شمردن کرد. اولی تکه‌های کاغذ را روی زانویش می‌چید و برای هر کدام با صدای بلند و به زبان خود می‌گفت «یک». دومی واژه «یک» را تکرار می‌کرد و، همراه با آن، یکی از انگشتان دست خود را می‌بست. اول انگشتان یک دست و بعد انگشتان دست دیگر خود را. وقتی به ۱۰ رسید و همه انگشتان دو دست او بسته شد، هردو دست خود را تا زانو پایین آورد و با صدای بلند، به زبان بومی‌ها، گفت «دو دست». در همین زمان، نفر سوم یکی از انگشتان خود را خم کرد، سپس، برای ۱۰ تکه کاغذ دوم، یک انگشت دیگر و برای ۱۰ تکه کاغذ بعدی، انگشت سوم خود را بست. تعداد بقیه کاغذها به ۱۰ نمی‌رسید و آنها را به کناری گذاشتند. به نظر می‌رسید، کار شمردن تمام شده‌است. ولی من آرامش آنها را به هم زدم. ...»

نیازی به ادامه نوشته این پژوهشگر نیست. تا همین جا، می‌توان به دو نتیجه اساسی رسید:

۱) انسان، در طول تاریخ خود، به تدریج و به کندی، شمردن را یاد گرفت و هر چه نیازهای زندگی پیچیده‌تر می‌شد، مرز «شمارش» بالاتر می‌رفت و توانایی شمردن تعداد بیشتری از چیزها را پیدا می‌کرد. در ضمن، در مرحله‌های نخستین، از اندام‌های بدن خود، و بیش از همه، از انگشتان دودست خود، برای شمردن استفاده می‌کرد. «دست» به معنای ۵ و «دست‌ها» به معنای ۱۰ بود. هنوز در زبان فارسی، برای ۵ انگشت دست از واژه «پنجه» استفاده می‌کنیم. این‌که انسان، به طور معمول، ۱۰ انگشت در دو دست خود دارد، موجب شد تا به تدریج همین عدد ۱۰، مبنایی برای «شمردن» شود. در نوشته بالا



شکل ۲۱: مقایسه تعداد تکه‌های کاغذ با انگشتان دست

دیدیم، وقتی بومیان، ضمن شمردن به ۱۰ می‌رسیدند، نفر دیگری، یک انگشت خود را به‌نشانه ۱۰، می‌بست و، همین روش شمردن، به‌تدریج و درطول زمان «عدد شماری دهدهی» را به‌وجود آورد. شاید، اگر انسان درهر دست خود، ۶ انگشت داشت، عدد شماری امروز، به‌جای «دهدهی»، «دوازده‌دوازدهی» می‌بود.

خیلی از قوم‌ها، برای عددشماری، از مبنای ۵ (تعداد انگشتان یک دست) یا از مبنای ۲۰ (تعداد انگشتان دست‌ها و پاها) استفاده می‌کردند، ولی درطول زمان، عددشماری دهدهی همگانی شد.

۲) اما نتیجه جالب‌تری که می‌توان گرفت، این است که برای شمارش، از مقایسه دو مجموعه، استفاده می‌کردند: مجموعه تکه‌های کاغذ و مجموعه انگشتان دست.

این مقایسه چگونه انجام می‌شد؟ انگشت دست، بایک تکه کاغذ فرق دارد. باوجوداین، با کنار گذاشتن هر تکه کاغذ، یک انگشت خود را می‌بستند، شمردن درمقایسه عضوهای دو مجموعه به‌وجود آمد و شکل گرفت.

این مقایسه را، در ریاضیات، تناظر یک‌به‌یک می‌گویند. در شکل ۲۱، هر تکه کاغذ متناظر با یک انگشت دست و هر انگشت دست متناظر بایک تکه کاغذ است. پس، تعداد تکه‌های کاغذ، با تعداد انگشتان یک دست برابر است.

هر مجموعه‌ای که بتوان عضوهای آن را با انگشتان یک دست، در تناظر یک‌به‌یک قرار داد، نمایندهٔ عدد ۵ است. و ۵، یک عدد طبیعی است. به‌طور کلی، اگر تعداد عضوهای دو مجموعه یکی باشد، دو مجموعه را هم‌عدد یا هم‌ارز ویا، در بعضی موردها، هم‌توان می‌گویند. عضوهای دو مجموعهٔ هم‌ارز را همیشه می‌توان در تناظر یک‌به‌یک قرار داد. در ضمن، مجموعه‌های هم‌ارز، معرف یک عدد طبیعی هستند. درواقع، هر عدد طبیعی را می‌توان ویژگی مشترک همهٔ مجموعه‌های هم‌ارزی دانست که تعداد عضوهای هریک از آن‌ها برابر با آن عدد طبیعی باشد. عددهای طبیعی از ۱ آغاز می‌شوند و، به‌ترتیب، هر عدد یک واحد از عدد قبلی خود بزرگتر است. به‌این‌ترتیب، عددهای طبیعی پایانی ندارند. و نمی‌توان عددی را نام برد که بزرگترین عدد طبیعی باشد. عددهای طبیعی، یک دنباله تشکیل می‌دهند. این دنباله، آغاز دارد، ولی پایانی ندارد.

$$1, 2, 3, 4, \dots, 1000, 1001, \dots$$



در میان انسان‌های نخستین، بی‌پایانی عددهای طبیعی، معنایی نداشت. آن‌ها، بسته به نیاز خود، تاجایی می‌شمردند و، از آن‌به‌بعد را، با واژهٔ «خیلی» بیان می‌کردند. هنوز در ضرب‌المثل‌ها و واژه‌ها، می‌توان نشانه‌هایی از این‌گونه را پیدا کرد. وقتی می‌گویند «هفت بار گزکن، یک‌بار پاره‌کن»^۱، به‌این معنا نیست که برای پاره‌کردن پارچه، باید درست هفت بار اندازه گرفت، نه کمتر و نه بیشتر، بلکه منظور این است که «به‌اندازهٔ کافی» دقت کن. وقتی در قصه‌های کودکان، از شهری صحبت می‌شود که «هفت برج و بارو» دارد، یعنی این شهر

^۱ گز یا ذرع، واحد طول در ایران، قبل از رسمی شدن دستگاه متری و برابر ۱۰۴ سانتی‌متر.

برج و باروهای زیادی دارد. برای بعضی عددهای دیگر هم، چنین نشانه‌هایی وجود دارد: «هزارپا»، یعنی جانوری که پاهای زیادی دارد؛ «چلچراغ»، یعنی وسیلهٔ روشنایی سقف سالن که چراغ‌های زیادی دارو و غیره.

درک بی‌پایان بودن دنبالهٔ عددهای طبیعی، خیلی آسان به‌دست نیامد. ارشمیدس، اقلیدس و اراتوستن، که به‌تقریب هم‌زمان بودند و در یونان پیش از میلاد می‌زیستند، به احتمال زیاد، نخستین کسانی بودند که دربارهٔ بی‌پایانی دنبالهٔ عددهای طبیعی بحث کردند. البته، ریاضی‌دانان هندی، از دوره‌های باستانی، با عددهای بزرگ کار می‌کردند و دربارهٔ عددهای بزرگ چیستان، می‌ساختند، ولی مفهوم بی‌پایانی دنبالهٔ عددهای طبیعی را در کارهای خود وارد نکردند.

ارشمیدس، برای این‌که نشان دهد «بزرگترین عدد طبیعی» وجود ندارد، کتاب «دانه‌های شن» را نوشت؛ اقلیدس، بی‌پایانی دنبالهٔ عددهای اول را ثابت کرد و اراتوستن، راهی برای به‌دست آوردن عددهای اول ارائه کرد.

§۲. مجموعه عددهای طبیعی

۱. ساده‌ترین و شناخته‌ترین عددها، عددهای درست مثبت‌اند که به آن‌ها، عددهای طبیعی گویند. عددهای طبیعی از ۱ آغاز می‌شوند و پایانی ندارند و، بنابراین، مجموعه‌ای بی‌پایان را تشکیل می‌دهند. مجموعهٔ عددهای طبیعی را با نماد N نشان می‌دهند:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

وقتی می‌نویسیم: $a \in N$ ، یعنی a عضوی از مجموعهٔ عددهای طبیعی است؛ به‌زبان دیگر: a ، یک عدد طبیعی است. عددهای طبیعی، بیش از هر عدد دیگری کاربرد دارند و، بنابراین، آشنایی با ویژگی‌های آن‌ها و شناخت

قانون‌های عمل با آن‌ها، اهمیت جدی دارد. وقتی مجموعه همه عددهای طبیعی را، با آغاز از عدد ۱ به‌ردیف صعودی (یعنی از کم به زیاد) بنویسیم، به آن دنباله عددهای طبیعی گویند.

هر عدد طبیعی n ، بعد از عدد طبیعی دیگری آمده‌است که برابر $n - 1$ است، به‌جز عدد ۱ که قبل از آن، عدد طبیعی دیگری وجود ندارد.

همچنین، برای هر عدد طبیعی n ، عدد دیگری وجود دارد که بلافاصله بعد از n قرار دارد: $n + 1$.

عددهای $n - 1$ ، n و $n + 1$ را سه عدد متوالی (یا سه عدد پشت‌سرهم) گویند.

بی‌پایانی دنباله عددهای طبیعی، از همین‌جا ناشی می‌شود، زیرا عدد طبیعی n را، هرقدر بزرگ درنظر بگیریم، عدد طبیعی $n + 1$ ، که بزرگتر از آن است، وجود دارد.

۲. عمل با عددهای طبیعی. در مجموعه عددهای طبیعی، عمل‌های جمع و ضرب، معین و قابل‌درک است، زیرا مجموع یا حاصل‌ضرب هر دو عدد طبیعی، خود، یک عدد طبیعی است. همچنین عمل توان (به‌شرطی که نما، عددی طبیعی باشد)، ممکن است، یعنی توان دست یک عدد طبیعی، باز هم عددی طبیعی است.

می‌گویند: مجموعه عددهای طبیعی، نسبت به عمل‌های جمع، ضرب و توان، مجموعه‌ای بسته است و این، به‌معنای آن است که، نتیجه عمل، عددی است که عضو مجموعه عددهای طبیعی است.

مجموعه عددهای طبیعی، نسبت به تفریق و تقسیم، بسته نیست، یعنی نتیجه کم کردن یک عدد طبیعی از عدد طبیعی دیگر، ممکن است عددی طبیعی نباشد؛ همچنین، نتیجه تقسیم عددی طبیعی بر عدد طبیعی دیگر،

۱. گاهی به‌اشتباه «رشته عددهای طبیعی» می‌گویند، ولی در یک رشته، باید جمله‌ها با علامت + یا - به‌هم مربوط باشند، درحالی‌که در دنباله، چنین علامت‌هایی وجود ندارد.

می‌تواند عددی طبیعی نباشد.

مثال. نتیجه تفریق $۷ - ۱۳$ برابر ۶ می‌شود که خود عددی طبیعی است، ولی نتیجه تفریق $۱۳ - ۷$ ، عددی طبیعی نیست.

همچنین، نتیجه تقسیم $۳ : ۱۲$ برابر ۴ می‌شود که عددی طبیعی است، ولی نتیجه تقسیم $۱۲ : ۴$ عددی طبیعی نیست.

مجموعه عددهای طبیعی، نسبت به عمل ریشه گرفتن هم، مجموعه‌ای بسته نیست: ریشه دوم ۹ ، عددی طبیعی و برابر است با ۳ ، ولی ریشه دوم ۵ ، عددی طبیعی نیست.

۳. ردیف عمل‌ها. وقتی با عمل‌های متوالی متعددی سروکار داشته باشیم، باید به چند نکته توجه کنیم:

(۱) عمل‌های داخل پرانتز، مقدم بر عمل‌های بیرون از آن است. فرض کنید، بخواهیم نتیجه این عمل‌ها را به دست آوریم:

$$۳ \times (۱۸۲ - ۷)$$

دراین‌جا، اول باید مقدار داخل پرانتز را پیدا کرد:

$$۱۸۲ - ۷ = ۱۷۵$$

و بعد، بقیه عمل‌ها را انجام داد (یعنی در ۳ ضرب کرد).

$$۳ \times (۱۸۲ - ۷) = ۳ \times ۱۷۵ = ۵۲۵$$

(۲) در ردیف عمل‌هایی که شامل پرانتز نباشند، عمل‌های ضرب و تقسیم بر عمل‌های جمع و تفریق مقدم‌اند. بین دو عمل ضرب و تقسیم یا دو عمل جمع و تفریق، در صورت نبودن پرانتز، باید عمل‌ها را به همان ردیفی که نوشته شده است، انجام داد.

$$۱۲ + ۲ \times ۸ : ۴ = ۱۲ + ۱۶ : ۴ = ۱۲ + ۴ = ۱۶;$$

$$۱۲۵ - ۷ \times ۴ + ۱۱۱ : ۳۷ =$$

$$= ۱۲۵ - ۲۸ + ۳ = ۹۷ + ۳ = ۱۰۰$$

۴. بخش‌پذیری در مجموعه عددهای طبیعی. می‌گویند عدد طبیعی a بر عدد طبیعی b بخش‌پذیر است، وقتی عددی طبیعی مثل c وجود داشته باشد، به نحوی که داشته باشیم:

$$a = b \times c$$

در تقسیم یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر، ممکن است خارج قسمت، عددی طبیعی نباشد، در این صورت می‌گویند، عدد اول بر عدد دوم بخش‌پذیر نیست؛ یا دقیق‌تر، در تقسیم عدد اول بر عدد دوم، اگر بخواهیم، خارج قسمت، عدد درستی باشد، عمل تقسیم همراه با باقی‌مانده است. مثلاً در تقسیم عدد ۲۷ بر عدد ۵، خارج قسمت برابر ۵ و باقی‌مانده برابر ۲ می‌شود؛ یا می‌توان گفت، خارج قسمت برابر عدد $۵\frac{۲}{۵}$ است، که عدد درستی نیست.

بنابراین، در برابر یک پرسش قرار می‌گیریم: چگونه می‌توان، از قبل، فهمید که یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر بخش‌پذیر است یا نه؟ برای ساده‌ترین عددها می‌توان پاسخ این پرسش را پیدا کرد.

پیش از آن‌که به معیارهای بخش‌پذیری بپردازیم، به دو نکته اشاره می‌کنیم. نکته اول این‌که، اگر دو عدد بر عدد سوم بخش‌پذیر باشند، مجموع یا تفاضل آن‌ها، بر عدد سوم بخش‌پذیر خواهد بود، عددهای ۴۲۰ و ۳۵۰، هردو بر ۷ بخش‌پذیرند:

$$۴۲۰ : ۷ = ۶۰; \quad ۳۵۰ : ۷ = ۵۰$$

در نتیجه، مجموع و تفاضل آن‌ها، یعنی

$$420 + 350 = 770; \quad 420 - 350 = 70$$

نیز بر ۷ بخش‌پذیرند:

$$770 : 7 = 110; \quad 70 : 7 = 10$$

همچنین، اگر عدد a بر عدد b بخش‌پذیر باشد، چند برابر عدد a هم، بر b بخش‌پذیر است. عدد ۱۵ بر ۵ بخش‌پذیر است:

$$15 : 5 = 3$$

پس ۱۱ برابر عدد ۱۵ یعنی ۱۶۵ هم بر ۵ بخش‌پذیر است:

$$165 : 5 = 33$$

نکته دوم مربوط به باز کردن یک عدد می‌شود. وقتی شما می‌نویسید ۷۷۷، تنها از رقم ۷ استفاده کرده‌اید. رقم ۷ را سه بار به کار برده‌اید، ولی معنای این سه رقم باهم فرق دارد: رقم ۷ سمت راست، یعنی ۷؛ رقم دوم از سمت راست، یعنی ۷۰ و رقم سوم یعنی ۷۰۰، پس ۷۷۷ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$700 + 70 + 7$$

این را، بازشده عدد ۷۷۷ گویند.

اگر رقم‌های یک عدد مثلاً سه‌رقمی را، از چپ به راست با حرف‌های a و b و c نشان دهیم، با نوشتن آن به صورت abc ممکن است اشتباه کنیم و خیال کنیم، منظور پیدا کردن حاصل ضرب سه عدد a و b و c در یکدیگر است. به همین مناسبت، آن را به صورت $\overline{abc}$ می‌نویسند: $\overline{abc}$ یعنی عدد

سهرقمی که یکان آن برابر c ، دهگان آن برابر b و صدگان آن برابر a است و بازشده آن چنین می‌شود:

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

اکنون معیارهای بخش‌پذیری بر برخی عددها را می‌آوریم.

۱) عددی بر ۲ بخش‌پذیر است که رقم سمت راست آن یا بر ۲ بخش‌پذیر و یا برابر صفر باشد. عددهای ۳۰، ۵۲، ۷۴، ۱۹۶، و ۴۷۵۸ همه بر ۲ بخش‌پذیرند.

یادداشت ۱. صفر بر هر عددی بخش‌پذیر و خارج‌قسمت برابر صفر است:

$$0 : 181 = 0; \quad 0 : 25 = 0$$

بنابراین، برای بخش‌پذیر بودن یک عدد بر ۲، می‌توان گفت: عددی بر ۲ بخش‌پذیر است که رقم سمت راست آن بر ۲ بخش‌پذیر باشد.

یادداشت ۲. عددهای بخش‌پذیر بر ۲ را، عددهای زوج و عددهای بخش‌ناپذیر بر ۲ را، عددهای فرد می‌نامند.

عددهای زوج مثبت، زیرمجموعه‌ای از مجموعه عددهای طبیعی هستند، همچنین، عددهای فرد مثبت هم، زیرمجموعه دیگری از عددهای طبیعی هستند.

یادداشت ۳. اگر عدد صفر را به مجموعه عددهای طبیعی اضافی کنیم، مجموعه عددهای حسابی، به دست می‌آید که آن را با W نشان می‌دهند:

$$W = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

۲) عددی بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌های آن بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر باشد.

$$۳ + ۴ + ۷ + ۵ + ۲ = ۲۱$$

۲۱ بر ۳ بخش‌پذیر است (زیرا مجموع رقم‌های آن، یعنی $۱ + ۲ + ۳$ بر ۳ بخش‌پذیر است)، پس عدد ۳۴۷۵۲ بر ۳ بخش‌پذیر است. ولی این عدد بر ۹ بخش‌پذیر نیست، زیرا مجموع رقم‌های آن (یعنی ۲۱) بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

(۳) عددی بر ۴ یا ۲۵ بخش‌پذیر است که عدد دورقمی سمت راست آن، بر ۴ یا ۲۵ بخش‌پذیر باشد.

عد ۹۷۳۶ بر ۴ بخش‌پذیر است، زیرا ۳۶ بر ۴ بخش‌پذیر است؛ این عدد بر ۲۵ بخش‌پذیر نیست، زیرا ۳۶ بر ۲۵ بخش‌پذیر نیست.

عدد ۴۲۸۳۷۵ بر ۲۵ بخش‌پذیر است زیرا ۷۵ بر ۲۵ بخش‌پذیر است؛ ولی همین عدد بر ۴ بخش‌پذیر نیست، زیرا ۷۵ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

(۴) عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که به ۵ یا ۰ ختم شده باشد. عددهای ۱۹۵ و ۲۱۰ بر ۵ بخش‌پذیر و عدد ۵۵۱ بر ۵ بخش‌ناپذیر است.

(۵) عددی بر ۶ بخش‌پذیر است که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد. ۱۲۶ بر ۶ بخش‌پذیر است، زیرا هم زوج است و هم مجموع رقم‌های آن، یعنی ۹، بر ۳ بخش‌پذیر است.

(۶) عددی بر ۸ یا ۱۲۵ بخش‌پذیر است که عدد سه‌رقمی سمت راست آن بر ۸ یا ۱۲۵ بخش‌پذیر باشد. عدد ۲۵۷۲۰ بر ۸ و عدد ۲۹۱۳۷۵ بر ۱۲۵ بخش‌پذیر است، زیرا ۷۲۰ بر ۸ و ۳۷۵ بر ۱۲۵ بخش‌پذیر است.

(۷) عددی بر ۱۰ بخش‌پذیر است که به صفر ختم شده باشد. عددهای ۱۱۰ و ۳۲۰۰ بر ۱۰ بخش‌پذیرند، زیرا رقم سمت راست آن‌ها برابر صفر است.

(۸) عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که تفاوت مجموع رقم‌های ردیف فرد

(با آغاز از سمت راست) و مجموع رقم‌های ردیف زوج (بازهم با آغاز از سمت راست)، برابر صفر یا بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.
مثلاً عدد ۷۵۹۴۴ را در نظر می‌گیریم. اگر از سمت راست عدد آغاز کنیم، رقم‌های ۴، ۹ و ۷ در ردیف فرد و رقم‌های ۴ و ۵ در ردیف زوج واقع‌اند و داریم

$$۲۰ = ۴ + ۹ + ۷ = \text{مجموع رقم‌های ردیف فرد}$$

$$۹ = ۴ + ۵ = \text{مجموع رقم‌های ردیف زوج}$$

تفاوت این دو مجموع، یعنی $۲۰ - ۹$ ، برابر ۱۱ می‌شود که بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس عدد ۷۵۹۴۴ هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است:

$$۷۵۹۴۴ : ۱۱ = ۶۹۰۴$$

(۹) عددی بر ۱۲ بخش‌پذیر است که هم بر ۳ و هم بر ۴ بخش‌پذیر باشد. عدد ۷۱۱۵۲۸ بر ۱۲ بخش‌پذیر است، زیرا مجموع رقم‌های آن

$$۷ + ۱ + ۱ + ۵ + ۲ + ۸ = ۲۴$$

و در نتیجه، خود عدد بر ۳ بخش‌پذیر است. از طرف دیگر، چون عدد دورقمی سمت راست، یعنی ۲۸ بر ۴ بخش‌پذیر است، پس خود عدد هم بر ۴ بخش‌پذیر می‌شود:

$$۷۱۱۵۲۸ : ۱۲ = ۵۹۲۹۴$$

بخش‌پذیری بر ۷ و ۱۳

پیش از آن‌که به معیار بخش‌پذیری یک عدد بر ۷ یا ۱۳ بپردازیم، با چند مفهوم، آشنا شویم.

عددی را در نظر می‌گیریم، مثلاً

$$۳۵۸۵۶۰۸۱۸۰۱۸۲$$

این عدد را، از سمت راست، به گروه‌های سه‌رقمی تقسیم می‌کنیم

$$۳, ۵۸۵, ۶۰۸, ۱۸۰, ۱۸۲$$

و آن‌ها را گروه عددهای سه‌رقمی می‌نامیم. در ضمن، اگر از سمت راست در نظر بگیریم، عددهای سه‌رقمی ردیف فرد را گروه سه‌رقمی‌های فرد و عددهای ردیف زوج را، گروه سه‌رقمی‌های زوج می‌نامیم.

۱۰) عددی بر ۷ بخش‌پذیر است که، در آن، تفاوت مجموع سه‌رقمی‌های ردیف فرد با مجموع سه‌رقمی‌های ردیف زوج، بر ۷ بخش‌پذیر باشد.

مثلاً در مورد عدد ۱۳ رقمی بالا مجموع سه‌رقمی‌های ریف فرد برابر است با

$$۱۸۲ + ۶۰۸ + ۳ = ۷۹۳$$

و مجموع سه‌رقمی‌های ردیف زوج

$$۱۸۰ + ۵۸۵ + ۷۶۵$$

اختلاف این دو عدد، یعنی

$$۷۹۳ - ۷۶۵ = ۲۸$$

بر ۷ بخش‌پذیر است، بنابراین خود عدد ۱۳ رقمی هم بر ۷ بخش‌پذیر است:

$$۳۵۸۵۶۰۸۱۸۰۱۸۲ : ۷ = ۵۱۲۲۲۹۷۴۰۰۲۶$$

(۱۱) معیار بخش‌پذیری بر ۱۳، شبیه معیار بخش‌پذیر بر ۷ است: عددی بر ۱۳ بخش‌پذیر است که اختلاف بین مجموع سه‌رقمی‌های ردیف فرد و مجموع سه‌رقمی‌های ردیف زوج در آن، بر ۱۳ بخش‌پذیر باشد. مثلاً، برای عدد ۱۳۳۲۶۶۹۷۹۳، مجموع سه‌رقمی‌های ردیف فرد، برابر

$$۷۹۳ + ۳۳۲ = ۱۱۲۵$$

و مجموع سه‌رقمی‌های ردیف زوج برابر

$$۶۶۹ + ۱ = ۶۷۰$$

و تفاضل آن‌ها برابر

$$۱۱۲۵ - ۶۷۰ = ۴۵۵$$

است که بر ۱۳ بخش‌پذیر است. پس عدد ۱۰ رقمی ما بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

$$۱۳۳۲۶۶۹۷۹۳ : ۱۳ = ۱۰۲۵۱۳۰۶۱$$

یادداشت. وقتی عدد a بر عدد b بخش‌پذیر باشد، a را مضرب b گویند.

۴۲ مضربی است از ۷ و ۹۱ مضربی است از ۱۳

۳۸. مجموعهٔ عددهای درست

برخی از ریاضی‌دانان سده‌های پیش در ایران (و همچنین در هند)، به مساله‌هایی برمی‌خورند که جواب آن‌ها، عددی کمتر از هیچ بود. آن‌ها، برای توضیح این‌گونه جواب‌ها، اصطلاح خاصی داشتند: عددهای بزرگتر از صفر را «موجودی» و عددهای کمتر از صفر را «قرض» می‌نامیدند، اصطلاح‌هایی که با واقعیت هم تطبیق می‌کند. به مثالی توجه کنیم.

شکل ۲۲: محور عددها

پدری ۵۰ سال و پسرش ۲۰ سال دارد. بعد از چند سال، سن پدر سه برابر سن پسر می‌شود.

تفاوت سال‌های سن پدر و پسر برابر ۳۰ است. این تفاوت هرگز تغییر نمی‌کند، یعنی وقتی که سن پدر سه برابر سن پسر باشد، باز هم تفاوت سن آن‌ها، همین ۳۰ سال است. در آن زمان، پدر به اندازه دو برابر سن پسر بزرگتر است، یعنی (در آن زمان)، دو برابر سن پسر برابر ۳۰ است. پس پسر باید ۱۵ سال و، در نتیجه، پدر ۴۵ سال داشته باشد تا داشته باشیم:

$$45 : 15 = 3$$

در صورت مساله گفته شده بود «چند سال دیگر، سن پدر سه برابر سن پسر می‌شود». و حالا که جواب را به دست آورده‌ایم، باید پاسخ بدهیم: «۵ سال پیش، سن پدر، سه برابر سن پسر بوده است».

اگر امروز را، مرز زمان گذشته و زمان آینده بدانیم، در ریاضیات، سال‌های آینده را با علامت + و سال‌های گذشته را با علامت - مشخص می‌کنند. بنابراین، به پرسش مساله می‌توان این‌طور پاسخ داد: «در ۵- سال دیگر، سن پدر سه برابر سن پسر می‌شود». «۵- سال دیگر، یعنی ۵ سال پیش».

عدد ۵- را قرینه عدد ۵+ (که همان ۵ است) می‌نامند. دلیل این نام‌گذاری این است که اگر روی یک خط راست افقی، نقطه‌ای را به عنوان مبدا و برای عدد ۰ انتخاب کنیم، می‌توانیم عددهای بزرگتر از صفر را (که عددهای مثبت نامیده می‌شوند) درست راست آن و عددهای کمتر از صفر

(یعنی عددهای منفی) را درست چپ آن نشان دهیم. در این صورت، جای دو عدد ۵ و ۵- (و همچنین جای دو عدد ۲ و ۲- و غیره)، درست قرینه یکدیگر، نسبت به نقطه مبدا قرار می‌گیرند (شکل ۲۲).

اجتماع مجموعه عددهای طبیعی و مجموعه قرینه‌های عددهای طبیعی، همراه با عدد ۰ را، مجموعه عددهای درست می‌نامند و یا $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهند:

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

§۴. کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد

۱. دو عدد ۵ و ۶ را در نظر بگیرید. مجموعه مضرب‌های هر کدام از این دو عدد، مجموعه‌ای بی‌پایان است.

$$A = 5 \text{ مضرب‌های } 5 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots\}$$

$$B = 6 \text{ مضرب‌های } 6 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\}$$

(تنها مضرب‌های مثبت را در نظر گرفته‌ایم و از ۰ هم، که مضرب هر عددی است، صرف نظر کرده‌ایم).

اگر عضوهای این دو مجموعه را، به اندازه کافی، بنویسیم، به عددهای زیادی برمی‌خوریم که در هر دو مجموعه وجود دارند؛ به زبان دیگر، اشتراک این دو مجموعه، خودش یک مجموعه بی‌پایان است:

$$A \cap B = \{30, 60, 90, 120, \dots\}$$

عضوهای مجموعه $A \cap B$ را، مضرب‌های مشترک دو عدد ۵ و ۶ گویند. کوچکترین این عددها، یعنی ۳۰، کوچکترین مضرب مشترک دو عدد ۵ و ۶ است.

۲. اکنون دو عدد ۲۷۳ و ۳۵۷ را در نظر می‌گیریم. هریک از این عددها، بر عددهای دیگری بخش‌پذیرند که آن‌ها را مقسوم‌علیه‌ها یا بخش‌یاب‌های آن‌ها گوئیم:

$$E = \text{مجموعه مقسوم‌علیه‌های } ۲۷۳ = \{۱, ۳, ۷, ۱۳, ۲۱, ۳۹, ۹۱, ۲۷۳\},$$

$$F = \text{مجموعه مقسوم‌علیه‌های } ۳۵۷ = \{۱, ۳, ۷, ۱۷, ۲۱, ۵۱, ۱۱۹, ۳۵۷\}$$

بین مجموعه‌های E و F هم عضوهای مشترکی وجود دارد که آن‌ها را مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد ۲۷۳ و ۳۵۷ گویند.

$$E \cap F = \{۱, ۳, ۷, ۲۱\}$$

مجموعه $E \cap F$ ، مجموعه‌ای باپایان است که در بین عضوهای آن، بزرگترین عدد وجود دارد. در این‌جا، بزرگترین عدد عضو مجموعه $E \cap F$ برابر است با ۲۱ و ۲۱ را بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۲۷۳ و ۳۵۷ گویند. درباره کوچکترین مضرب و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک اندکی بعد، باز هم صحبت خواهیم کرد.

۵. عدد اول

به عددی اول گوئیم که تنها بر دو عدد بخش‌پذیر باشد: عدد ۱ و خودش. عددهای ۱۳ و ۱۰۱، عددهایی اول‌اند، زیرا جز بر ۱ و خودشان، بر عدد دیگری بخش‌پذیر نیستند.

مجموعه عددهای اول، که زیرمجموعه‌ای از مجموعه عددهای طبیعی است، مجموعه‌ای بی‌پایان است، اگر مجموعه عددهای اول را با P نشان دهیم، چند عضو نخستین این مجموعه، چنین است.

$$P = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, \dots\}$$

همه عددهای اول، به جز ۲، عددهایی فردند.

عددهای غیر اول را، عددهای مرکب گویند. عدد ۱ را نه اول به حساب می آورند و نه مرکب

۶۶. عددهایی که بخش یاب مشترکی جز واحد ندارند
دو عدد ۱۵۴ و ۱۹۵ را در نظر می گیریم. این ها، عددهایی مرکب اند:

$$154 = \{1, 2, 7, 11, 14, 22, 77, 154\}$$

$$195 = \{1, 3, 5, 13, 15, 39, 65, 195\}$$

ولی بین بخش یاب های آن ها، جز واحد، عدد مشترک دیگری وجود ندارد:

$$\{1\} = (\text{بخش یاب های } 195) \cap (\text{بخش یاب های } 154)$$

از دو عدد ۱۵۴ و ۱۹۵ هیچ کدام اول نیستند، ولی از آن جاکه، جز ۱، بخش یاب مشترک دیگری ندارد، آن ها را نسبت به هم اول گویند.

دو عدد طبیعی وقتی نسبت به هم اول اند که، جز ۱، بخش یاب مشترک دیگری نداشته باشند. بزرگترین بخش یاب مشترک (یا بزرگترین مقسوم علیه مشترک) دو عددی که نسبت به هم اول اند، برابر است با واحد.

به دو عددی را که نسبت به هم اول اند، عددهای متباین هم می گویند.

تمرین ها

۶۳. کدام مجموعه عددها، نسبت به سه عمل جمع، تفریق و ضرب، بسته است، یعنی نتیجه عمل، باز هم عضوی از همان مجموعه است؟

۶۴. در مجموعه عددهای طبیعی، در بیشتر عددها، عمل تقسیم، همراه با باقی مانده است. چه روشی برای آزمایش درستی عمل تقسیم می شناسید؟

۶۵. تفاضل دو عدد، برابر است با ۱۶. دو جمله تفریق را چگونه

تغییر دهیم، تا تفاضل برابر صفر شود؟

۶۶. ۱) اگر یکی از جمله‌های ضرب را ۳ برابر کنیم، حاصل ضرب چه تغییری می‌کند؟ ۲) اگر به یکی از جمله‌های ضرب سه واحد را اضافه کنیم، چطور؟ ۳) همچنین، اگر یکی از جمله‌های ضرب را نصف کنیم؟ ۴) اگر از یکی از جمله‌های ضرب ۲ واحد کم کنیم؟
۶۷. ۱) اگر بخشی (مقسوم) را نصف کنیم، خارج قسمت چه تغییری می‌کند؟ باقی‌مانده چطور؟ ۲) اگر از بخشی ۲ واحد کم کنیم، در خارج قسمت و باقی‌مانده چه تغییری حاصل می‌شود؟
۶۸. اگر مقسوم (بخشی) را سه برابر کنیم یا سه واحد به آن اضافه کنیم، خارج قسمت و باقی‌مانده چه تغییری می‌کنند؟
۶۹. در تقسیم عددی بر ۵، خارج قسمت برابر ۲۰۴ شده است، ولی از باقی‌مانده اطلاعی نداریم. این عدد، چه عددهایی می‌تواند باشد؟
۷۰. نتیجه این عمل‌ها را پیدا کنید:

- ۱) $123 \times 26 + 12924 : 36 + 34248 : 24;$
- ۲) $29932 : 28 - 8432 : 34 + 6179 - 97 \times 38;$
- ۳) $58956 : 17 + 29154 : 43 - 256 \times 14;$
- ۴) $[21344 : 16 + (1540 - 978) + 32 \times 74] : 52;$
- ۵) $854250 : [318 \times 274 - (59347 + 24368)]$

۷۱. پنج زیرمجموعه بی‌پایان، از مجموعه عددهای طبیعی را بنویسید.
۷۲. این عمل‌ها را انجام دهید:

- ۱) $(37 \times 11 - 2035 : 5) \times 96 + 18;$
- ۲) $(125972 - 409 \times 308) : 92;$
- ۳) $834 \times (145 \times 203 - 29130 -$
 $- 74115 : 243) + 804 \times 205$

۷۳. برای پیدا کردن حاصل ضرب یک عدد در ۵، چهارراه ساده و سریعی پیشنهاد می‌کند؟ برای ضرب در هریک از عددهای ۲۵، ۹، ۹۹، ۱۵، ۱۱ یا ۱۰۱ چطور؟

برای تقسیم بر ۵ یا ۲۵ یا ۵۰ چه روش ساده‌ای پیشنهاد می‌کنید؟
 ۷۴*. آیا می‌توانید روش ساده‌ای برای ضرب یک عدد دورقمی که به ۵ ختم شده است، در خودش، پیدا کنید، مثل ۶۵×۶۵ یا ۹۵×۹۵ ؟
 ۷۵*. معیارهای بخش‌پذیری بر عددهای از ۲ تا ۱۵ را ثابت کنید.
 ۷۶. مجموعه مضرب‌های هریک از سه عدد ۶، ۹ و ۱۵ را بنویسید.
 کوچکترین مضرب مشترک آن‌ها کدام است؟

۷۷. مجموعه مقسوم‌علیه‌ها (بخش‌یاب‌ها) را برای هریک از عددهای ۳۶، ۶۰ و ۸۴ بنویسید. بزرگترین بخش‌یاب مشترک این عددها کدام است؟
 ۷۸. آیا برای دو عدد، بزرگترین مضرب مشترک یا کوچکترین بخش‌یاب مشترک وجود دارد؟

۷۹. عددی پیدا کنید که از حاصل ضرب آن در ۷، عددی شش‌رقمی به صورت $\overline{aaaaaa}$ به دست آید (یعنی همه رقم‌ها، دراین عدد شش‌رقمی باهم برابر باشند).

۸۰. عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $a \neq c$.
 (۱) چرا تفاضل دو عدد $\overline{abc}$ و $\overline{cba}$ بر ۹ و بر ۱۱ بخش‌پذیر است؟
 (۲) چرا عدد شش‌رقمی $\overline{abcabc}$ بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است؟
 ۸۱*. همه عددهای دورقمی را پیدا کنید که، اگر در هر کدام از آن‌ها، ۲ واحد به هر رقم اضافه کنیم، حاصل ضرب عددهایی که به دست می‌آید، برابر خود عدد دورقمی شود.

۸۲*. بزرگترین عدد n را پیدا کنید که، برای آن، عدد دورقمی $\overline{ab}$ برابر حاصل ضرب $(a+n)(b+n)$ باشد. دراین صورت، عدد دورقمی $\overline{ab}$ چقدر است؟

*۸۳. آیا عددی ۹ رقمی پیدا می‌شود که، در آن، همه رقم‌های از ۱ تا ۹، بدون تکرار، وجود داشته‌باشد و، درضمن، از ضرب آن در عدد ۸، عدد نه‌رقمی دیگری، با همان رقم‌ها، ولی با ردیفی دیگر، به‌دست آید؟

*۸۴. مجموعه عددهای طبیعی را به دو زیرمجموعه دلخواه، ولی جدا از هم A و B تقسیم کرده‌ایم:

$$A \cup B = \mathbb{N} \text{ و } A \cap B = \emptyset$$

ثابت کند، دست‌کم در یکی از دو زیرمجموعه A یا B ، دو عضو وجود دارد، به‌نحوی که میانگین حسابی آن‌ها هم، متعلق به همان مجموعه است.

یادداشت. میانگین حسابی دو عدد، یعنی نصف مجموع آن‌ها. مثلاً میانگین حسابی دو عدد ۱۵ و ۲۵ برابر است با $\frac{15+25}{2}$ ، یعنی ۲۰.

*۸۵. با رقم‌های از ۱ تا ۶، همه عددهای شش‌رقمی ممکن را نوشته‌ایم، به‌نحوی که در هیچ‌کدام از آن‌ها، رقم تکراری وجود نداشته‌باشد. سپس، این عددها را، به‌ترتیب صعودی، یعنی از کم به زیاد نوشته و برای آن‌ها، شماره ردیف گذاشته‌ایم: عدد شماره ۱، عدد شماره ۲، عدد شماره ۳ و غیره. در این ردیف، عدد $A = 435216$ چه شماره‌ای دارد؟

۸۶. آیا می‌توان با رقم‌های از ۱ تا ۶، یک عدد شش‌رقمی، با رقم‌های متفاوت، ساخت، به‌نحوی که بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد؟

*۸۷. عدد ۱۳۷۵ را به‌صورت مجموع n عدد مرکب نوشته‌ایم، به‌نحوی که نمی‌توان آن را به‌صورت $n+1$ عدد مرکب نوشت. n را پیدا کنید.

*۸۸. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که رقم سمت راست آن، برابر ۴ باشد و اگر این رقم را از سمت راست عدد، به سمت چپ آن منتقل کنیم، عدد ما، ۴ برابر شود.

۸۹. A و B ، زیرمجموعه‌هائی از مجموعه C هستند و می‌دانیم، برای

هر زیرمجموعه دلخواهی از C مثل X داریم:

$$X \cap A = X \cup B$$

زیرمجموعه‌های A و B را پیدا کنید.

*۹۰. بین رقم‌های یک عدد دورقمی، رقم ۰ را گذاشته‌ایم، عددی سهرقمی به دست آمده که بر عدد اصلی دورقمی بخش‌پذیر است. بزرگترین و کوچکترین خارج قسمت ممکن را (که عددی درست باشد)، پیدا کنید.

*۹۱. به کمک سهرقم مختلف، که هیچ کدام برابر صفر نیستند، همه عددهای سهرقمی ممکن را ساخته‌ایم. مجموع دو عدد بزرگتر از این عددهای سهرقمی، برابر ۱۴۴۴ شده است. این سهرقم را پیدا کنید.

*۹۲. a, b, c, d, e, f و g ، هر کدام یک رقم‌اند و می‌دانیم.

$$\begin{cases} \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{efg} \\ \{0, b\} \cup \{c, d\} = \{e, f, g\} \end{cases}$$

مساله چند جواب دارد؟ جواب‌ها را پیدا کنید.

*۹۳. مجموع رقم‌های عدد x برابر y و مجموع رقم‌های عدد z برابر

عدد z شده است. مطلوب است عددهای x ، y و z ، به شرطی که

$$x + y + z = 60$$

۴. توان

۱۴. تکرار عمل ضرب، یعنی توان

در ریاضیات، تکرار یک عمل، می‌تواند معنای تازه‌ای پیدا کند:

- اگر عدد ۱ را درنظر بگیریم و یک واحد به آن اضافه کنیم، عدد ۲ به‌دست می‌آید؛ با اضافه کردن واحد به ۲، عدد ۳، سپس عدد ۴ و غیره را می‌توان به‌دست آورد. تکرار «عمل اضافه کردن واحد» دنبالهٔ عددهای طبیعی را می‌سازد.

- تکرار عمل جمع، وقتی تنها بایک عدد سروکار داشته‌باشیم، عمل ضرب را به‌وجود می‌آورد:

$$۱۲ + ۱۲ + ۱۲ + ۱۲ = ۴ \times ۱۲$$

- تکرار عمل تفریق، مفهوم عمل تقسیم را روشن می‌کند:

$$۳۰ - ۶ = ۲۴; ۲۴ - ۶ = ۱۸;$$

$$۱۸ - ۶ = ۱۲; ۱۲ - ۶ = ۶; ۶ - ۶ = ۰;$$

عمل تفریق، ۵ بار تکرار شده‌است، پس

$$۳۰ : ۵ = ۶ \text{ یا } ۳۰ : ۶ = ۵$$

اکنون فرض کنید بخواهیم عدد ۷ را ۳ بار در خودش ضرب کنیم:

$$۷ \times ۷ \times ۷ = ۴۹ \times ۷ = ۳۴۳$$

در این‌جا هم، مثل موردهای قبل، راه ساده‌تری برای نوشتن انتخاب کرده‌اند:

$$۷ \times ۷ \times ۷ = ۷^۳$$

نماد + را در نظر بگیرید. برای این که نشان دهیم، باید عدد ۷ را ۳ بار در خودش ضرب کنیم، ۷ را در گوشه پایین و سمت چپ این نماد و ۳ را در گوشه راست و بالای آن می نویسیم.

$$\begin{array}{c|c} & 3 \\ \hline 7 & \end{array}$$

و برای سادگی، خود نماد + را حذف می کنیم و می نویسیم: 7^3 . ۷ را پایه و ۳ را نما می نامیم. 7^3 ، یک توان است: 7^3 ، یعنی ۷ را سه بار در خودش ضرب کنیم.

* ریاضی دانان ایرانی، مثل خوارزمی، کرجی، خیام و کاشانی، که در زمینه «جبر» کار کرده اند، برای نوشتن یک عبارت جبری از هیچ نمادی استفاده نمی کردند. آن ها مجهول یا متغیر را «شیء»؛ توان دوم را «مال»، توان سوم را «کعب» [به جای «مکعب»]، توان چهارم را «مال مال»، توان پنجم را «مال کعب» و توان ششم را «کعب کعب» می نامیدند و همه چیز را با بیان شرح می دادند.

به این مساله، که از کتاب «جبر و مقابله» خوارزمی برداشته شده است، توجه کنید (با اندکی تغییر در جمله بندی ها):

«ده را طوری به دو بخش تقسیم کنید که، اگر هر بخش را در خودش ضرب و دو حاصل ضرب را با هم جمع کنیم، پنجاه و هشت به دست آید». درواقع، منظور خوارزمی، حل این معادله است:

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58$$

اکنون، به راه حل مساله - با بیان خوارزمی - توجه کنید:
 «یکی از بخش ها را شیء فرض کنید و دیگری را ده منهای شیء». که به زبان امروزی، یعنی «یکی از بخش ها را x و دیگری را $10 - x$

بگیرید. خوارزمی می‌گوید: «صد به‌اضافه دو مال و بیست شیء ناقص، برابر پنجاه و هشت قرار می‌دهی». دو مال، یعنی $2x^2$ و بیست شیء ناقص یعنی $20x -$ ؛ جمله خوارزمی، به زبان امروزی می‌شود:

$$100 + 2x^2 - 20x = 58$$

خوارزمی ادامه می‌دهد: «بیست شیء ناقص را جبر می‌کنی و به پنجاه و هشت می‌افزایی» که، به زبان امروزی، یعنی، جمله منفی $20x -$ را به طرف دیگر معادله می‌بری، می‌شود

$$100 + 2x^2 = 58 + 20x$$

لازم نیست، مسأله خوارزمی را با زبان او ادامه دهیم، تنها می‌خواستیم با نوع نوشتن و عمل ریاضی‌دانان ایرانی، و با اصطلاح‌های آن‌ها، اندکی آشنا شوید.

نمادی که امروز برای توان‌ها به کار می‌بریم و آن‌ها را به صورت a^2 ، a^3 ، a^4 ، و غیره می‌نویسیم، از رنه دکارت، ریاضی‌دان فرانسوی است که آن را از سال ۱۶۳۷ میلادی معمول کرد.

۲§. ردیف عمل‌ها

وقتی با عددهای درست کار می‌کردیم، دیدیم، اگر در یک ردیف عمل، پرانتزی وجود نداشته باشد، دو عمل ضرب و تقسیم، بر دو عمل جمع و تفریق مقدم‌اند. اکنون تاکید می‌کنیم، عمل توان بر عمل‌های ضرب و تقسیم مقدم است. وقتی داشته باشیم:

$$5 \times 2^4$$

عمل 2^4 (یعنی توان) پیش از عمل ضرب باید انجام شود:

$$5 \times 2^4 = 5 \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 5 \times 16 = 80$$

اگر قرار بود اول ۵ را در ۲ ضرب کنیم و، سپس، نتیجه ضرب را به توان ۴ برسانیم، باید آن را این طور می نوشتیم:

$$(5 \times 2)^4 = 10^4 = 10000$$

می بینید 5×2^4 و $(5 \times 2)^4$ چقدر با هم فرق دارند.

مثال. حاصل این عبارت عددی را محاسبه کنید:

$$A = 215 + 126 : 3^2 - 7^2 \times 2 : 14$$

حل. ابتدا فقط عمل های توان را انجام می دهیم:

$$A = 215 + 126 : 9 - 343 \times 2 : 14$$

بعد، عمل های ضرب و تقسیم را، به همان ردیفی که وجود دارند:

$$A = 215 + 14 - 686 : 14 = 229 - 49 = 180$$

۳۶. عمل با توان ها

۱) در حالت کلی، برای جمع دو توان با هم، تفریق دو توان از یکدیگر، ضرب دو توان در یکدیگر و تقسیم دو توان بر هم، باید نتیجه هر توان را به طور جداگانه به دست آورد، سپس عمل جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم را انجام داد:

$$2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17; 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7;$$

$$2^5 \times 3^2 = 32 \times 9 = 288; 7^2 : 3^2 = \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}$$

(۲) تنها در ضرب و در تقسیم (ونه در جمع و تفریق)، به شرطی که پایه‌ها یا نماها با هم برابر باشند، می‌توان راه ساده‌تری برای عمل‌های ضرب و تقسیم پیدا کرد.

اول. ضرب دو توان با پایه‌های برابر. فرض کنید بخواهیم حاصل ضرب دو عدد 7^2 و 7^3 را پیدا کنیم:

$$7^2 \times 7^3 = (7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7) = 7^5$$

یعنی به شرط این که $m \in \mathbb{N}$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آن وقت

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (1)$$

دوم. تقسیم دو توان با پایه‌های برابر. مطلب با مثال روشن می‌شود:

$$\begin{aligned} 15^7 : 15^2 &= \frac{15 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15}{15 \times 15 \times 15 \times 15} = \\ &= 15 \times 15 \times 15 = 15^3 \end{aligned}$$

یعنی، برای هر $m \in \mathbb{N}$ و $n \in \mathbb{N}$ و $m > n$ داریم:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (2)$$

یادداشت. در ریاضیات اغلب تلاش می‌کنند، تاجایی که ممکن است، قاعده‌ها و دستورها، کمتر مشروط باشند. درمورد تقسیم، اگر شرط $m > n$ را حذف کنیم، برای دو حالت $m = n$ و $m < n$ ، دستور (۲)، مثلاً چنین نتیجه‌ای می‌دهد:

$$a^2 : a^2 = a^0 \text{ و } a^2 : a^4 = a^{-2}$$

ولی می‌دانیم، خارج قسمت دو عدد برابر، مساوی ۱ می‌شود، یعنی $a^2 : a^2$ برابر است با ۱. به همین مناسبت، قبول کرده‌اند که

$$a^0 = 1$$

یعنی، برای هر پایه دلخواه (ولی مخالف صفر)، وقتی نما برابر صفر باشد، حاصل عدد را برابر واحد می‌گیریم.

$$10^0 = 1, \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1, (-7)^0 = 1$$

و اما در تقسیم $a^2 : a^4$ داریم:

$$a^2 : a^4 = \frac{a \times a}{a \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^2}$$

به همین مناسبت a^{-2} را هم به معنای $\frac{1}{a^2}$ پذیرفته‌اند:

$$a : a^5 = a^{-2} = \frac{1}{a^2};$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\frac{2}{5}^2} = \frac{5}{2}$$

سوم. ضرب دو توان با نماهای برابر. به مثالی توجه کنیم:

$$\begin{aligned} a^2 \times b^2 &= (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) = \\ &= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) = (a \times b)^3 \end{aligned}$$

یعنی، برای ضرب دو توان با نماهای برابر، پایه‌ها را درهم ضرب می‌کنیم و همان نما را برای آن در نظر می‌گیریم:

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m \quad (3)$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$$

چهارم. تقسیم دو توان با نماهای برابر. بازهم به مثال توجه کنید:

$$\begin{aligned} a^5 : b^5 &= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b} = \\ &= \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^5 \end{aligned}$$

یعنی، شبیه ضرب، برای تقسیم دو توان، وقتی نماها برابر باشند، پایه‌ها را برهم تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را به‌توان همان نما می‌رسانیم:

$$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$2^3 : 3^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3; 186^2 : 31^2 = 6^2 = 216$$

۳) وقتی بخواهیم یک عدد توان‌دار را به‌توان جدیدی برسانیم، به‌شرط درست بردن نماها، نماها را درهم ضرب می‌کنیم:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} (m \in \mathbb{Z} \text{ و } n \in \mathbb{Z})$$

به‌عنوان مثال

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2 \times 3} = a^6$$

$$(a^2)^{-3} = \frac{1}{(a^2)^3} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$$

یادداشت. توجه کنید $(a^2)^3$ با a^{2^3} فرق دارد. درواقع، a^{2^3} را به‌جای $a^{(2^3)}$ می‌نویسند:

$$(2^3)^2 = 2^6 = 64;$$

$$2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$$

۴۴. تجزیه یک عدد مرکب، به صورت ضرب عامل‌های اول.

هر عدد مرکب، از ضرب عددهای اول به دست می‌آید:

$$۴ = ۲ \times ۲ = ۲^۲; ۱۴ = ۲ \times ۷;$$

$$۲۰ = ۲ \times ۲ \times ۵ = ۲^۲ \times ۵$$

ساده‌ترین روش، برای تجزیه یک عدد، روش تقسیم‌های متوالی است. فرض کنید، بخواهیم عدد ۵۰۴ را به ضرب عامل‌های اول تجزیه کنیم. ردیف عددهای اول کوچکتر از ۱۰۰ را می‌شناسیم:

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹, ۳۱, ۳۷, ۴۱, ۴۳, ۴۷

۵۳, ۵۹, ۶۱, ۶۷, ۷۱, ۷۳, ۷۹, ۸۳, ۸۹, ۹۷, ۱۰۱

عدد ۵۰۴ بر ۲، یعنی کوچکترین عدد اول بخش‌پذیر است.

$$۵۰۴ : ۲ = ۲۵۲ \quad (۱)$$

خارج قسمت، یعنی ۲۵۲ هم بر ۲ بخش‌پذیر است:

$$۲۵۲ : ۲ = ۱۲۶ \quad (۲)$$

باز هم خارج قسمت بر ۲ بخش‌پذیر است:

$$۱۲۶ : ۲ = ۶۳ \quad (۳)$$

۶۳ بر ۲ بخش‌پذیر نیست، ولی بر عدد اول بعدی، یعنی ۳، بخش‌پذیر است:

$$۶۳ : ۳ = ۲۱ \quad (۴)$$

و ۲۱ هم بر ۳ بخش پذیر است:

$$21 : 3 = 7 \quad (5)$$

۷، عددی اول است. در این پنج تقسیم، ۳ بار بر ۲، ۲ بار بر ۳ تقسیم کردیم و خارج قسمت برابر عدد اول ۷ شد.

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

ولی بهتر و ساده تر است، همه تقسیم ها را یک جا و باهم انجام دهیم:

۵۰۴	۲	$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$
۲۵۲	۲	
۱۲۶	۲	
۶۳	۳	
۲۱	۳	
۷	۷	
۱		

تمرین ها

۹۴. به این پرسش ها پاسخ دهید:

(۱) آیا a^0 همیشه برابر است با ۱؟ $(x-2)^0$ چطور؟

(۲) آیا همیشه $a^n \neq b^n$ ؟

(۳) می دانیم $a > b > 0$. آیا $a^n > b^n$ ؟

(۴) آیا همیشه $x^2 > x$ ؟

۹۵. محاسبه کنید:

۱) $3^2 \times 9^{-2}$;

۲) $2^{-2}(2^{-2})^{-2}$;

۳) $\frac{3^{-5}}{3^4} : 3^{-7}$;

۴) $(5^{-5})^{-1} \cdot (\frac{1}{4})^{-2} : 10^{-5}$;

۵) $(3^{-2})^{-2} \cdot 3^{-5} \times 27$, ۶) $4^{-6} \cdot 256^2 \cdot 2^2$

۹۶. m کدام عدد درست باشد تا داشته باشیم:

$$۱) 7^2 \times 7^m = 7; \quad ۲) 5^2 \times 5^m = \frac{1}{5};$$

$$۳) 11^{-2} \times 121^m = 11, \quad ۴) 9^m : 3^5 = 3;$$

$$۵) 3^{-2} \times 3^2 \times 3^m = 3^7; \quad ۶) 2^{-1} \times 2^m = 9 \times 2^5 - 4 \times 2^m$$

۹۷. اگر بدانیم $a^m = b^m$ ، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹۸. این عمل‌ها را انجام دهید:

$$۱) (27a^2b^2c)(3ab^5); \quad ۲) (x^{12}y^4t^2) : (x^4y^2t); \quad ۳) (2p^2q^2s^{12})^5$$

۹۹. با استفاده از نماهای منفی، این کسرها را به صورت عبارت‌هایی

غیرکسری بنویسید.

$$۱) \frac{1}{x^5}; \quad ۲) \frac{1}{0.01}; \quad ۳) \frac{1}{0.0000001};$$

$$۴) \frac{1}{5}; \quad ۵) \frac{1}{a}; \quad ۶) \frac{2}{\sqrt{1}};$$

$$۷) \frac{a}{a+b}; \quad ۸) \frac{3a^2b^2}{cd^3}$$

۱۰۰. این عبارت‌ها را، بدون وجود توان منفی، بنویسید:

$$۱) 3^{-2} \times 5^{-2} \times 2^7; \quad ۲) a^2 \cdot b^{-1}; \quad ۳) \frac{a^{-1}b}{c^{-1}d}$$

۱۰۱. این عددها را به صورت ضرب توان‌هایی از عددهای اول تجزیه

کنید:

$$۱) 68796; \quad ۲) 8024; \quad ۳) 510510$$

۱۰۲. ثابت کنید، ۹۷۱ عددی اول است.

۱۰۳. به کمک تجزیه به عامل‌های اول، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک را پیدا کنید:

$$۱) ۳۶, ۶۰; \quad ۲) ۲۵, ۳۵; \quad ۳) ۸۰, ۵۶;$$

$$۴) ۱۶۹, ۵۷۶, \quad ۵) ۲۷۷۲, ۶۲۸۳۲$$

۱۰۴*. همهٔ عددهای سه‌رقمی را پیدا کنید که، هرکدام از آن‌ها، تنها ۵ مقسوم‌علیه (بخش‌یاب) داشته باشد.

۱۰۵*. رقم سمت راست عدد $۹^{۹^۹}$ را پیدا کنید.

۱۰۶*. عدد $۷^{۷^۷}$ به چه رقمی ختم می‌شود؟

۱۰۷*. از تقسیم عدد $۹۰۱^{۱۳۷۲}$ بر ۳۱، چه باقی‌مانده‌ای به دست می‌آید؟

۱۰۸*. ثابت کنید، اگر عددی اول باشد، یا به صورت $۶k - ۱$ است و یا به صورت $۶k + ۱$ ($k \in \mathbb{N}$)، به جز عددهای اول ۲ و ۳. آیا عکس این حکم درست است، یعنی هر عدد به صورت $۶k \pm ۱$ ($k \in \mathbb{N}$) عددی اول است؟

۱۰۹*. ثابت کنید، نمی‌توان عدد اول p را طوری پیدا کرد که، در ضمن، هر دو عدد $p + ۵$ و $p + ۱۰$ هم اول باشند.

۱۱۰*. همهٔ عددهای اول p را پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، دو عدد $p + ۱۰$ و $p + ۱۴$ هم اول باشند.

۱۱۱*. کدام بزرگترند، A یا B ؟ به‌شرطی که

$$A = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times ۲۰$$

$$B = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \dots + ۱۰۰۰۰۰۰$$

۱۱۲*. دنبالهٔ عددهایی را در نظر می‌گیریم که با ۸ آغاز شده و هر جمله

۶ واحد از جمله قبل بیشتر باشد.

۸, ۱۴, ۲۰, ۲۶, ۳۲, ۳۸, ۴۴, ۵۰, ...

آیا در بین جمله‌های این دنباله، می‌توان توان دوم، توان سوم، توان چهارم یا توان پنجم یک عدد طبیعی را پیدا کرد؟

* ۱۱۳. کوچکترین عدد اولی را پیدا کنید که بتوان آن به صورت مجموع ۲ و ۳ و ۴ و ۵ عدد اول نوشت.

* ۱۱۴. ثابت کنید عدد $۵۵۵۵^{۲۲۲۲} + ۲۲۲۲^{۵۵۵۵}$ بر عدد ۷ بخش‌پذیر است.

* ۱۱۵. از دو عدد $۲۴۲^{۱۱}$ و $۸۳^{۱۲}$ ، کدام کوچکتر است؟

* ۱۱۶. باقی‌مانده حاصل از تقسیم عددی بر ۷ برابر ۵ و باقی‌مانده حاصل از تقسیم همان عدد بر ۱۳ برابر ۲ شده است. باقی‌مانده حاصل از تقسیم این عدد بر حاصل ضرب ۱۳×۷ ، یعنی ۹۱، چقدر است؟ مجموعه این‌گونه عددها را پیدا کنید.

* ۱۱۷. عدد طبیعی N را بر ۷، ۱۳ و ۱۷ تقسیم کرده‌ایم، به ترتیب، باقی‌مانده‌های ۵، ۲ و ۱ به دست آمده است. کوچکترین عدد N را پیدا کنید. مجموعه‌ای را بنویسید که عضوهای آن، دارای ویژگی عدد N باشند.

* ۱۱۸. $۸^۹$ بزرگتر است یا $۹^۸$ ؟

* ۱۱۹. ثابت کنید دنباله عددهای اول دنباله‌ای بی‌پایان است.

* ۱۲۰. کدام بزرگترند: $۱۰۰۰x - ۱۰۰۰$ یا $۵۰x - ۸۰۰$ ؟

۵. مجموعه عددهای گویا

۱۶. نسبت دو عدد طبیعی

برای مقایسه دو عدد طبیعی از نسبت آن‌ها استفاده می‌کنند.

اگر بخواهیم دو عدد ۱۲ و ۴ را باهم مقایسه کنیم، به دو گونه می‌توان دآوری کرد.

(۱) عدد ۱۲، به اندازه ۸ واحد، از عدد ۴ بیشتر است:

$$۱۲ - ۴ = ۸;$$

۸، یعنی تفاضل دو عدد ۴ و ۱۲ را، نسبت عددی یا نسبت حسابی این دو عدد گویند.

نسبت حسابی نشان می‌دهد که در مقایسه دو عدد طبیعی، کدام عدد بزرگتر است و چقدر!

(۲) عدد ۱۲، سه برابر عدد ۴ است:

$$۱۲ : ۴ = ۳;$$

عدد ۳ را نسبت هندسی ۱۲ و ۴ گویند.

یادداشت. وقتی واژه «نسبت» را، بدون واژه اضافی «حسابی» یا «هندسی» به کار برند، منظور «نسبت هندسی» است. دلیل این امر آن است که، در ریاضیات و دیگر دانش‌ها، کاربرد «نسبت هندسی» خیلی بیشتر از «نسبت حسابی» است. در این کتاب هم، هر جا با واژه «نسبت» روبه‌رو شویم، منظور نسبت هندسی است.

(۳) در نسبت هندسی دو عدد، بیشتر، به جای نشانه تقسیم (:)، از نشانه کسر (—) استفاده می‌کنند و «۱۲ : ۴» را به شکل $\frac{۱۲}{۴}$ می‌نویسند.

در این صورت می‌توان نسبت ۴ بر ۱۲ را هم پیدا کرد:

$$۴ : ۱۲ = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

می‌گوییم، عدد ۴ یک‌سوم عدد ۱۲ است.

یادداشت. باید بگوییم، عدد ۱۲ سه برابر عدد ۴ است؛ عدد ۴، یک‌سوم عدد ۱۲ است. در برخی کتاب‌ها و مقاله‌ها، با پیروی از اصطلاح معمول در کتاب‌های بیگانه، می‌نویسند: ۱۲، سه‌برابر از ۴ بیشتر است و یا ۴، سه‌برابر از ۱۲ کمتر است. این شکل بیان، در زبان فارسی نادرست است و موجب اشتباه می‌شود:

۱۲ به‌اندازه دو برابر ۴، از ۴ بیشتر است، نه سه‌برابر آن، همچنین ۴، به‌اندازه دو برابر خودش از ۱۲ کمتر است، نه سه‌برابر.

از این گذشته، در «نسبت هندسی» کاری به بیشتر بودن و کمتر بودن نداریم. در این جا صحبت بر سر چند برابر بودن یک عدد، در مقایسه با عدد دیگر است.

۲۸. مفهوم کسر و ویژگی‌های آن

به هر عددی که از نسبت دو عدد درست (مثبت یا منفی یا صفر) به دست آمده باشد، کسر گویند. هر یک از عددهای $\frac{۲}{۳}$ یا $-\frac{۴}{۷}$ و یا $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) $b \neq 0$ یک کسر است.

به این چند نکته توجه کنیم

(۱) در کسر $\frac{a}{b}$ ، a را صورت و b را مخرج کسر گویند.

(۲) در کسر $\frac{a}{b}$ عدد b نمی‌تواند برابر با صفر باشد، زیرا تقسیم بر ۰ معنی ندارد. هر وقت بایک کسر سروکار داریم، به یاد داشته باشیم که مخرج آن نمی‌تواند، برابر صفر باشد.

(۳) در کسر $\frac{a}{b}$ ، بهتر است b را همیشه عددی مثبت فرض کنیم.

$$-\frac{7}{9} = \frac{-7}{9}; \frac{5}{-6} = \frac{-5}{6}$$

(۴) اگر $a = 0$ ، آنوقت کسر $\frac{a}{b}$ ، به ازای هر عدد دلخواه $b \neq 0$ ، برابر صفر است: $(b \neq 0) \frac{0}{b} = 0$.

(۵) اگر $b = 1$ ، آنوقت $\frac{a}{b} = a$:

$$\frac{3}{1} = 3, \frac{-7}{1} = -7$$

بنابراین، مجموعه عددهای درست، یعنی مجموعه $\mathbb{Z}$ ، زیرمجموعه‌ای از مجموعه کسرهاست.

(۶) مجموعه همه کسرها را، مجموعه عددهای گویا گویند و با نماد $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

(مجموعه عددهای طبیعی، زیرمجموعه‌ای از مجموعه عددهای حسابی، مجموعه عددهای حسابی، زیرمجموعه‌ای از مجموعه عددهای درست و مجموعه عددهای درست زیرمجموعه‌ای از مجموعه عددهای گویا است).

(۷) اگر a و b را عددهای طبیعی فرض کنیم، به شرط $a < b$ داریم $\frac{a}{b} < 1$ و اگر $a > b$ ، آنگاه $\frac{a}{b} > 1$.

(۸) بافرض $a \in \mathbb{N}$ و $b \in \mathbb{N}$ ، اگر به صورت مخرج کسر $\frac{a}{b}$ ، عددی

طبیعی اضافه کنیم، کسر $\frac{a}{b}$ به واحد نزدیکتر می‌شود. c را عددی طبیعی می‌گیریم، دراین صورت

اگر $1 < \frac{a}{b}$ ، آن وقت $\frac{a+c}{b+c} > \frac{a}{b}$ ؛

اگر $1 > \frac{a}{b}$ ، آن وقت $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$.

کسر $\frac{3}{4}$ کوچکتر از واحد است. اگر ۲ واحد به صورت و مخرج اضافه

کنیم، به کسر $\frac{5}{6}$ می‌رسیم که از $\frac{3}{4}$ بزرگتر است، زیرا

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10 - 9}{12} = \frac{1}{12}$$

$\frac{5}{6}$ به اندازه $\frac{1}{12}$ از $\frac{3}{4}$ بزرگتر است.

ولی اگر به صورت مخرج کسر $\frac{4}{3}$ ، دو واحد اضافه کنیم، به کسر $\frac{6}{5}$

می‌رسیم که از $\frac{4}{3}$ کوچکتر است، زیرا

$$\frac{4}{3} - \frac{6}{5} = \frac{20 - 18}{15} = \frac{2}{15}$$

$\frac{6}{5}$ به اندازه $\frac{2}{15}$ از $\frac{4}{3}$ کوچکتر است.

در هر دو حالت، با اضافه کردن یک عدد طبیعی به صورت و مخرج کسر،

مقدار کسر به واحد نزدیکتر می‌شود.

(۹) اگر صورت و مخرج یک کسر را در عددی مخالف صفر ضرب و

یا بر عددی مخالف صفر تقسیم کنیم، مقدار کسر تغییر نمی‌کند.

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{200}{500};$$

$$\frac{16}{32} = \frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}; \frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m} \quad (m \neq 0)$$

(۱۰) برای ضرب دو کسر در یکدیگر، می‌توان صورت‌ها را درهم و مخرج‌ها را درهم ضرب کرد؛ و برای تقسیم، می‌توان صورت‌ها را برهم و مخرج‌ها را برهم تقسیم کرد:

$$\frac{3}{8} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{8 \times 5} = \frac{21}{40};$$

$$\frac{25}{34} : \frac{5}{17} = \frac{25 : 5}{34 : 17} = \frac{5}{2}$$

ولی برای تقسیم دو کسر بر یکدیگر، می‌توان مقسوم‌علیه را معکوس کرد (یعنی جای صورت و مخرج آن را باهم عوض کرد) و، سپس، آن‌ها را درهم ضرب کرد:

$$\frac{6}{13} : \frac{1}{5} = \frac{6}{13} \times \frac{5}{1} = \frac{30}{13}$$

(۱۱) برای پیدا کردن مجموع یا تفاضل دو کسر، باید ابتدا، کسر‌ها را به یک مخرج تبدیل و، سپس، مجموع یا تفاضل صورت‌ها را به‌دست آورد و همان مخرج مشترک را، مخرج آن قرار داد:

$$\frac{5}{17} + \frac{3}{17} = \frac{5+3}{17} = \frac{8}{17};$$

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{4}{9};$$

$$\frac{5}{16} - \frac{1}{7} = \frac{5 \times 7 - 16}{16 \times 7} = \frac{35 - 16}{112} = \frac{19}{112}$$

(۱۲) در کسرهای بزرگتر از واحد، می‌توان با انجام عمل تقسیم صورت مخرج، مقدار درست عدد را جدا کرد. کسر $\frac{27}{13}$ را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{r} 27 \\ 13 \overline{) 27} \\ \underline{26} \\ 1 \end{array} \Rightarrow \frac{27}{13} = 2 + \frac{1}{13}$$

ولی چنین معمول شده است که علامت + را نمی گذارند:

$$2 + \frac{1}{12} = 2\frac{1}{12}$$

مواظب باشید $2 \times \frac{1}{13}$ ، یعنی $\frac{2}{13}$ ، ولی $2\frac{1}{13}$ یعنی $2 + \frac{1}{13}$ ، $\frac{27}{13}$ یعنی $a \cdot \frac{b}{c}$ ، $\frac{ab}{c}$ ،
ولی $a\frac{b}{c}$ یعنی $a + \frac{b}{c}$.

عمل جدا کردن عدد درست را از کسر، رفع گویند.

(۱۳) برعکس می توان عدد درست را وارد کسر کرد

$$2\frac{1}{13} = 2 + \frac{1}{13} = \frac{26 + 1}{13} = \frac{27}{13}$$

که به آن، عمل تجنيس گویند.

(۱۴) مجموعه کسرها، یعنی مجموعه عددهای گویا، نسبت به عمل های

جمع؛ تفریق، ضرب، تقسیم و توان، یک مجموعه بسته است:

مجموع، تفاضل، حاصل ضرب، خارج قسمت و توان یک عدد گویا،

باز هم عددی گویا است.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16};$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

(۱۵) بین هر دو عدد گویا، هر قدر به هم نزدیک باشند، بی نهایت عدد گویا

وجود دارد.

مثال. بین دو عدد گویای $\frac{41}{43}$ و $\frac{42}{43}$ ، ۹۹ عدد گویا پیدا کنید (عددهایی

که از $\frac{41}{43}$ بزرگتر و از $\frac{42}{43}$ کوچکتر باشند).

حل. راه حل اول. می دانیم، اگر صورت و مخرج کسری را در یک عدد ضرب کنیم، مقدار کسر تغییر نمی کند. پس

$$\frac{41}{43} = \frac{4100}{4300} \text{ و } \frac{42}{43} = \frac{4200}{4300}$$

(صورت و مخرج را در هر کسر ۱۰۰ برابر کردیم) اکنون روشن است که مقدار هریک از کسرهای

$$\frac{4101}{4300}, \frac{4102}{4300}, \dots, \frac{4158}{4300}, \dots, \frac{4199}{4300}$$

(که تعداد آن ها برابر ۹۹ است)، از $\frac{41}{43}$ بزرگتر و از $\frac{42}{43}$ کوچکتر است.

راه حل دوم. ابتدا به یک قانون توجه کنیم: فرض کنیم کسر $\frac{a}{b}$ از کسر $\frac{c}{d}$ کوچکتر باشد. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. در این صورت کسری که صورت آن، مجموع صورت ها و مخرج آن، مجموع مخرج های این دو کسر باشد، از نظر مقدار، بین این دو کسر قرار دارد، یعنی

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

مثلاً دو کسر $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ را در نظر بگیرید، $\frac{1}{4}$ از $\frac{3}{4}$ کوچکتر است. کسر $\frac{1+3}{4+4}$ ، یعنی $\frac{4}{8}$ یا $\frac{2}{4}$ از $\frac{1}{4}$ بزرگتر و از $\frac{3}{4}$ کوچکتر است:

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4}$$

در مساله، با دو کسر $\frac{41}{43}$ و $\frac{42}{43}$ سروکار داریم، پس

$$\frac{41}{43} < \frac{41+42}{43+43} = \frac{83}{86} < \frac{42}{43}$$

به همین ترتیب، می‌توان عدد گویایی بین دو عدد $\frac{41}{43}$ و $\frac{83}{86}$ و همچنین، عددی بین $\frac{83}{86}$ و $\frac{42}{43}$ پیدا کرد:

$$\frac{41}{43} < \frac{124}{129} < \frac{83}{86} < \frac{125}{129} < \frac{42}{43}$$

به همین ترتیب می‌توان بین هر دو عدد گویا (در این ردیف عددها)، یک عدد قرار داد. با ادامه این روش، می‌توانیم هر چند عدد گویا که مایل باشیم، بین دو عدد $\frac{41}{43}$ و $\frac{42}{43}$ قرار دهیم.

نتیجه مهم. برای یک عدد گویا نمی‌توانیم عددی پیدا کنیم که بلافاصله بعد یا بلافاصله قبل از آن واقع باشد، زیرا هر عددی را، هر قدر نزدیک به عدد گویای $\frac{a}{b}$ در نظر بگیریم، باز هم بی‌نهایت عدد بین آن‌ها وجود دارد.

(۱۶) کسر $\frac{9}{b}$ را، به شرطی که a و b نسبت به هم اول باشند (یعنی، بخش‌یاب مشترکی نداشته باشند)، کسر ساده‌نشده‌ای یا تحویل‌ناپذیر گویند. کسر $\frac{30}{91}$ تحویل‌ناپذیر است، زیرا ۳۰ و ۹۱ نسبت به هم اول‌اند و، بنابراین، نمی‌توان این کسر را ساده کرد. ولی کسر $\frac{39}{91}$ تحویل‌ناپذیر نیست، زیرا ۳۹ و ۹۱، هر دو بر ۱۳ بخش‌پذیرند و، بنابراین، کسر ساده می‌شود:

$$\frac{39}{91} = \frac{3 \times 13}{7 \times 13} = \frac{3}{7}$$

۳۸. کسرهای دهمی

ریاضی‌دانان ایرانی، به پیروی از ریاضی‌دانان عیلامی و بابلی، بیشتر از مبنای ۶۰ در عددنویسی و عددشماری استفاده می‌کردند. مثلاً می‌نوشتند: ۲ درجه و ۵ دقیقه و ۳۰ ثانیه:

$$20^{\circ} 5' 30''$$

که به معنای این عدد بود:

$$2 + \frac{5}{60} + \frac{30}{3600} = 2 + \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = 2\frac{11}{120}$$

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضی‌دان ایرانی که دوره حکومت تیموریان زندگی می‌کرد، برای نخستین بار، مقدارهای کمتر از واحد را به صورت دهدهی (یا اعشاری) نوشت.

برای پیدا کردن شکل دهدهی عدد، کافی است صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم، مثلاً در عدد بالا، کسر $\frac{11}{120}$ به این صورت در می‌آید:

$$11 : 120 = 0.091666\dots$$

سه نقطه‌ای که در پایان عدد گذاشته‌ایم، به معنای این است که رقم ۶ مرتباً تکرار می‌شود. در ریاضیات، برای این که نشان دهند، رقم ۶ تکرار می‌شود، عدد را به یکی از دو شکل زیر می‌نویسند:

$$\frac{11}{120} = 0.091\overline{6} \text{ یا } \frac{11}{120} = 0.091(6)$$

گونه‌های مختلف تبدیل کسر به صورت دهدهی

(۱) اگر در مخرج کسر، تنها عامل‌های اول ۲ و ۵ وجود داشته باشد، کسر دهدهی در جایی تمام می‌شود و رقم یا رقم‌های تکراری پیدا نمی‌کند:

$$\frac{2}{5} = 0.4; \frac{1}{2} = 0.5; \frac{3}{25} = 0.12;$$

$$\frac{7}{8} = 0.875; \frac{7}{40} = 0.175; \dots$$

این کسرها را، کسرهای تحقیقی گویند.

(۲) اگر در مخرج کسر، عامل‌های اول ۲ و ۵ وجود نداشته باشد، شکل دهمی عدد، تنها رقم‌های تکراری خواهد داشت:

$$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,(3); \quad \frac{2}{11} = 0,181818... = 0,(18);$$

$$\frac{35}{111} = 0,315315... = 0,(315);$$

$$\frac{9}{101} = 0,08910891... = 0,(0891);$$

$$\frac{5}{13} = 0,384615384615... = 0,(384615);$$

$$\frac{12}{17} = 0,(7058823529411764)$$

این‌ها، کسرهای دوره‌ای ساده‌اند.

(۳) وقتی که در مخرج کسر، هم عامل‌های ۲ یا ۵ و هم عامل‌های دیگر وجود داشته باشد، رقم یا رقم‌های تکراری، از رقم بلافاصله بعد از ممیز آغاز نمی‌شود.

$$\frac{1}{4 \times 3 \times 5} = \frac{1}{60} = 0,01666... = 0,01(6);$$

$$\frac{169}{2 \times 3 \times 5 \times 11} = \frac{169}{330} = 0,51212... = 0,5(12);$$

$$\frac{6}{5 \times 11} = \frac{6}{55} = 0,10909... = 0,1(09);$$

$$\frac{11}{14} = 0,7(857142)$$

این‌ها، کسرهای دوره‌ای مرکب‌اند.

یادداشت ۱۰) کسرهای دوره‌ای را، کسرهای متناوب هم می‌گویند؛ (۲) رقم یا رقم‌هایی را که در کسرهای دوره‌ای تکرار می‌شوند، دوره گردش آن گویند. در

کسر دهمی (۲۵) ۰/، دوره گردش ۲۵ و در کسر دهمی (۱۴۲) ۰/۱۵،
 ۱۴۲ دوره گردش و ۱۵ رقم‌های غیرگردش‌اند؛ ۳) کسرهای عادی مثل $\frac{۲}{۵}$ و
 $\frac{۳}{۷}$ و $\frac{۱۱}{۱۷}$ را، اغلب کسر متعارفی می‌نامند.

۴۶. تبدیل کسرهای دهمی به کسرهای متعارفی

۱) کسرهای دهمی غیردوره‌ای (که به آن‌ها کسرهای دهمی تحقیقی هم می‌گویند) به سادگی و به همان صورتی که بیان می‌شوند، قابل تبدیل به کسرهای متعارفی‌اند:

$$۰/۲، یعنی دو دهم، بنابراین $\frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵} = ۰/۲$ ؛$$

$$۰/۲۴، یعنی بیست و چهار صدم، بنابراین $\frac{۲۴}{۱۰۰} = \frac{۶}{۲۵} = ۰/۲۴$.$$

۲) برای تبدیل کسر دوره‌ای ساده به کسر متعارفی، یک دوره گردش را در صورت کسر می‌نویسیم و سپس، به تعداد رقم‌های دوره گردش، رقم ۹ را در مخرج قرار می‌دهیم:

$$۰/۳۳۳... = ۰/(۳) = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}؛$$

$$۰/۲۷۲۷۲۷... = ۰/(۲۷) = \frac{۲۷}{۹۹} = \frac{۳}{۱۱}؛$$

$$۰/۲۹۷۲۹۷... = ۰/(۲۹۷) = \frac{۲۹۷}{۹۹۹} = \frac{۱۱}{۳۷}$$

۳) برای تبدیل کسر دوره‌ای مرکب به کسر متعارفی، به این ترتیب عمل می‌کنیم:

در صورت کسر ابتدا رقم‌های غیرگردش را می‌نویسیم و یک دوره گردش را در سمت آن قرار می‌دهیم، سپس، عدد شامل رقم‌های غیرگردش را از آن کم می‌کنیم. در مخرج کسر، به تعداد رقم‌های دوره گردش ۹ و به تعداد

رقم‌های غیرگردش صفر قرار می‌دهیم:

$$۰٫۲۶۶۶\dots = ۰٫۲(۶) = \frac{۲۶-۲}{۹۰} = \frac{۲۴}{۹۰} = \frac{۴}{۱۵};$$

$$۰٫۰۱۸۱۸\dots = ۰٫۰(۱۸) = \frac{۰۱۸-۰}{۹۹۰} = \frac{۱}{۵۵};$$

$$۰٫۵۸۳۳\dots = ۰٫۵۸(۳) = \frac{۵۸۳-۵۸}{۹۰۰} = \frac{۷}{۱۲}$$

* یادداشت تاریخی. مفهوم «کسر» بعد از آن که تصور کم‌ویش مشخصی دربارهٔ عددهای طبیعی به‌وجود آمد، پدیدار شد. مفهوم کسر هم مثل مفهوم عددهای طبیعی، به‌تدریج و در طول زمانی طولانی شناخته شد. مفهوم «نصف» یا «نیم» خیلی زودتر از مفهوم‌های «یک‌سوم» و «یک‌چهارم» پیدا شد. و این دو مفهوم «یک‌سوم» و «یک‌چهارم» هم، پیش از سایر کسرها وارد در زبان و «محاسبه» شد. تقریباً در همهٔ زبان‌ها، واژهٔ «نصف» یا «نیم» با واژهٔ «دو» ارتباطی ندارد و این، به‌معنای آن است که، در آغاز، «نیم» را برای تکه‌ای از یک واحد به‌کار می‌بردند، نه برای $\frac{۱}{۳}$ آن. اصطلاح‌های «بیشتر از نصف»، «کمتر از نصف»؛ «نیم‌روز» و یا ضرب‌المثل «نصف عمر شدم»، که در زبان فارسی به‌کار می‌رود، نشانه‌ای براین مطلب است. تصور دربارهٔ عددهای طبیعی، ضمن شمارش چیزها، و تصور دربارهٔ کسرها، ضمن اندازه‌گیری (محاسبهٔ طول، وزن و غیره) به‌وجود آمد. نشانه‌های رابطهٔ بین محاسبه با کسرها و دستگاه‌های اندازه‌گیری را، در بیشتر زبان‌ها می‌توان دید. قبل از عمومی شدن دستگاه متری، در ایران برای وزن، از واژه‌های خروار (۳۰۰ کیلو)، من (۳ کیلوگرم)، نیم‌من، چارک (همان چهاریک)، سی‌سنگ (به‌معنای $\frac{۱}{۳}$ چارک یا $\frac{۱}{۸}$ من)، پانزده‌سنگ (به‌معنای $\frac{۱}{۱۶}$ من) و غیره استفاده می‌کرده‌اند. مصری‌ها و هندی‌های دوران کهن، به فراوانی از کسرهای متعارفی استفاده می‌کرده‌اند.

براهماگوپتا (که در سده هشتم میلادی می‌زیست و نسبت او به «مغ - برهمن»ها، دانشمندان ایرانی که در دوران پارت‌ها از سیستان به هند رفتند، می‌رسید)، عمل با کسرهای متعارفی را (با اندکی تفاوت با امروز) توضیح داده‌است. شکل امروزی نوشتن کسر هم، متعلق به هندی‌هاست، تنها خط کسری را نمی‌نوشتند و مثلاً $\frac{2}{5}$ را به صورت $\frac{2}{5}$ یادداشت می‌کردند. نوشتن کسرهای متعارفی و عمل با آن‌ها را، برای نخستین بار، محمد فرزند موسی مشهور به خوارزمی (که ملقب به «المجوسی» بود) در کتاب «حساب» خود به کاربرد و، بعد از آن، همه ریاضی‌دانان ایرانی از آن پیروی کردند. لئوناردو فیبوناچی اهل پیزا، که در سده سیزدهم میلادی می‌زیست و به‌خاطر سفرهای خود در شرق، با دانش کشورهای خاورزمین آشنا شده‌بود، کسرهای متعارفی و روش عمل با آن‌ها را، برای نخستین بار، در اروپای غربی متداول کرد. کسرهای دهمی، از ابداع‌های دانشمند بزرگ ایرانی، غیاث‌الدین جمشید کاشانی (سده‌های ۱۴ و ۱۵ میلادی) است که در کتاب «مفتاح الحساب» (رازگشای شمار) خود آورده‌است. بازرگان و دانشمند هلندی، سیمون استه‌ون (۱۵۴۸-۱۶۲۰) کسرهای دهمی را به اروپاییان شناساند.

۵۶. بخشی از یک عدد

۱. پیدا کردن بخشی از یک عدد. برای پیدا کردن بخشی از یک عدد، باید آن عدد را در کسری که معرف آن بخش است ضرب کرد.

مثال. کارخانه‌ای ۱۲۰ کارگر دارد. برای انتخاب هیأت مدیره اتحادیه کارگران این کارخانه، باید دست‌کم $\frac{2}{3}$ کارگران حاضر باشند. با چند نفر، جلسه رسمی می‌شود؟

$$\text{حل. } ۱۲۰ \times \frac{2}{3} = ۸۰ \text{ دست‌کم با } ۸۰ \text{ نفر.}$$

۲. پیدا کردن عدد با در دست داشتن بخشی از آن. وقتی بخشی از یک

عدد معلوم باشد، برای پیدا کردن خود عدد، باید بخش عدد را (که معلوم است) بر کسری که میزان بخش را معین می‌کند، تقسیم کنیم.

مثال. $\frac{4}{5}$ گوسفندان یک گله را که ۴۲۰ رأس بودند، برای فروش، از گله جدا کردند. تمام گله، چند رأس گوسفند داشته است؟

$$\text{حل. } \frac{3}{5} : 420 = 700.$$

۳. بیان بخشی از یک کل، به صورت یک کسر. برای پیدا کردن کسری که نشان دهد، چه بخشی از کل انتخاب شده است، باید عدد معرف بخش را به عدد معرف کل تقسیم کرد.

مثال. در کلاسی که ۳۰ دانش آموز دارد، ۴ نفر نیامده اند، چه بخشی از دانش آموزان کلاس غیبت دارند؟

$$\text{حل. } \frac{2}{15} = \frac{4}{30} = 40\%.$$

درصد

درصد، حالت خاصی است از بخشی از یک عدد. وقتی که بخش یک عدد را با کسری بیان کنیم که مخرج آن برابر ۱۰۰ باشد، آن وقت صورت کسر، مقدار «درصد» را بیان می‌کنید: $\frac{2}{5}$ یک مقدار، یعنی ۴۰ درصد آن، زیرا $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 20}{5 \times 20} = \frac{40}{100}$. ۴۰ درصد را به صورت ۴۰٪ می‌نویسند. ۱٪

یعنی $\frac{1}{100}$ یا ۰/۰۱؛ ۲۷٪ یعنی ۲۷/۱۰۰؛ ۱۰۰٪ یعنی ۱ و ۱۵۰٪ یعنی $\frac{150}{100}$ یا ۱/۵.

۵٪ حق التألیف کتاب برای مالیات است، یعنی ۵/۰۵ پولی که باید به نویسندگان کتاب داده شود، به عنوان مالیات از آن کم می‌شود؛ ۱۰۰٪ حقوق یک کارمند، یعنی تمام حقوق او؛ اگر کسی ۱۵۰٪ حقوق خود را بابت کرایه خانه می‌دهد، یعنی ۱/۵ برابر (یک برابر و نیم) حقوقش را باید برای کرایه

سه مسأله اساسی درباره درصد وجود دارد.

مسأله ۱. پیدا کردن درصد یک عدد مفروض. عدد مفروض را در عدد درصد ضرب و، سپس، حاصل را بر ۱۰۰ بخش می‌کنیم:

مثال: در یک معدن زغال‌سنگ، میزان استخراج ماهیانه زغال ۲۸۶۰ تن است. ولی در ماه فروردین، به علت تعطیل نوروزی، ۸۰٪ میزان معمول ماهیانه استخراج شد. چند تن زغال‌سنگ در ماه فروردین استخراج شده‌است؟ حل.

$$۱) ۲۸۶۰ \times ۸۰ = ۲۲۸۸۰۰;$$

$$۲) ۲۲۸۸۰۰ : ۱۰۰ = ۲۲۸۸ \text{ (تن)}$$

مسأله ۲. پیدا کردن عدد با معلوم بودن درصد معینی از آن. مقدار معلوم درصد را بر عددی که معرف میزان درصد است، تقسیم و نتیجه را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم.

مثال. ۱۵٪ چوبی که برای تهیه کاغذ وارد کارخانه کاغذسازی می‌شود، به‌صورت کاغذ درمی‌آید، برای تهیه ۶۰ تن کاغذ، چند تن چوب لازم است؟ حل.

$$۱) ۶۰ : ۱۵ = ۴; \quad ۲) ۴ \times ۱۰۰ = ۴۰۰ \text{ (تن)}$$

مسأله ۳. این که یک عدد، چند درصد عدد دیگر است. ۱۰۰ برابر عدد اول را بر عدد دوم تقسیم می‌کنیم.

مثال ۱. در هر جعبه‌ای که ۵۰۰ لامپ دارد، ۴۸۲ لامپ سالم و بقیه معیوب‌اند. چند درصد لامپ‌ها معیوب‌اند؟ حل.

$$۱) ۵۰۰ - ۴۸۲ = ۱۸;$$

$$۲) ۱۸ \times ۱۰۰ = ۱۸۰۰; \quad ۳) ۱۸۰۰ : ۵۰۰ = ۳/۶$$

۳/۶ درصد (۳/۶٪) از لامپ‌ها خراب‌اند.

مثال ۲. دانش‌آموزی در برنامه‌ای که برای روز بی‌کاری خود ریخته‌بود، تصمیم گرفت ۶۰ صفحه از کتاب زندگی‌نامه «اوارست گالوا»، ریاضی‌دان جوان‌مرگ فرانسوی را بخواند. ولی او توانست ۷۵ صفحه از این کتاب را بخواند چند درصد برنامه خود را انجام داده‌است؟
حل.

$$۱) ۷۵ \times ۱۰۰ = ۷۵۰۰;$$

$$۲) ۷۵۰۰ : ۶۰ = ۱۲۵$$

این دانش‌آموز ۱۲۵٪ برنامه خود را انجام داده‌است.

یادداشت ۱. در هر سه حالت مسأله اصلی مربوط به «درصد»، می‌توان ردیف دو عمل را تغییر داد. مثلاً در مسأله آخر، می‌توان اول عمل تقسیم را انجام داد و، سپس، نتیجه را در ۱۰۰ ضرب کرد.
یادداشت ۲. مثال زیر را به این خاطر آورده‌ایم که از اشتباه احتمالی برخی از دانش‌آموزان، جلو گرفته باشیم.

فرض کنید می‌خواهیم بدانیم قیمت اولیه یک متر پارچه چقدر بوده‌است، به شرطی که بعد از ۱۵٪ تخفیف، متری ۲۵۵۰ ریال درآمده است.
پیش آمده‌است که، برای حل این مسأله، ابتدا ۱۵٪ عدد ۲۵۵۰ ریال را محاسبه کرده‌اند.

$$۲۵۵۰ \times ۰/۱۵ = ۳۸۲/۵$$

سپس، این مبلغ ۳۸۲/۵ ریال را به ۲۵۵۰ ریال اضافه کرده‌اند:

$$۲۵۵۰ + ۳۸۲/۵ = ۲۹۳۲/۵$$

و گمان کرده‌اند که قیمت پیش از تخفیف یک متر پارچه، برابر $2932/5$ ریال بوده‌است. ولی، این جواب درست نیست. درواقع $382/5$ ریال، به تقریب ۱۳ درصد $2932/5$ ریال است، نه ۱۵ درصد آن.

راه حل درست چنین است: بعد از تخفیف، درواقع ۸۵ درصد قیمت اولیه پرداخت شده‌است ($100 - 15 = 85$). بنابراین 2550 ریال ۸۵ درصد قیمت یک متر پارچه، پیش از تخفیف است:

$$2550 : 0.85 = 3000$$

هر متر پارچه، پیش از تخفیف، 3000 ریال قیمت داشته‌است. یادداشت ۳. ضمن محاسبه با مساله‌های مربوط به «درصد» باید از مقدارهای تقریبی، که هم‌اکنون به آن خواهیم پرداخت، استفاده کرد.

۹۶. محاسبه‌های تقریبی

در ریاضیات محاسبه‌ای، با دوگونه عدد سروکار داریم: عددهای دقیق و عددهای تقریبی. در زندگی و درعمل، اغلب، به جای مقدار دقیق یک عدد، از مقدار تقریبی آن استفاده می‌کنیم، زیرا همین مقدارهای تقریبی، مشکل ما را برای رسیدن به هدف خود، حل می‌کنند. به‌ویژه این‌که، در بسیاری موردها، نمی‌توانیم به مقدار دقیق یک عدد دست یابیم.

می‌گوییم، فلان کتاب ۳۲۰ صفحه دارد. این، یک عدد دقیق است. شش ضلعی دارای ۹ قطر است. در این جا هم، ۹ یک عدد دقیق است. شما ۱۰۰ گرم کره می‌خرید. در این جا عدد ۱۰۰ تقریبی است، زیرا ترازویی که با آن کره را وزن می‌کنند، نمی‌تواند 0.5 گرم کمتر یا بیشتر را، با دقت نشان دهد.

می‌گوییم فاصله شهر A تا شهر B ، ۶۵۰ کیلومتر است. ۶۵۰، در این جا یک عدد تقریبی است، زیرا هم ابزارهای اندازه‌گیری دقیق نیستند و هم

نقطه آغاز و نقطه پایان، به تقریب انتخاب شده‌اند.

روشن است، وقتی با عددهای تقریبی عمل کنیم، نتیجه عمل هم تقریبی خواهد بود. از این گذشته، عمل با عددهای تقریبی، می‌تواند منجر به نتیجه‌ای شود که، نه تقریبی، بلکه اشتباه باشد.

فرض کنیم، بخواهیم حاصل ضرب دو عدد تقریبی $۶۰/۲$ و $۸۰/۱$ را (که تنها تا رقم اول بعد از ممیز در نظر گرفته‌ایم)، به دست آوریم. ضرب این دو عدد، ما را به نتیجه $۴۸۲۲/۰۲$ می‌رساند، ولی این نتیجه ممکن است، نه تنها در رقم‌های صدم و دهم، بلکه حتی در رقم‌های درست، اشتباه باشد. اگر عددها را تا دورقم بعد از ممیز (به جای یک رقم) در نظر می‌گرفتیم، و اگر این عددها $۶۰/۲۵$ و $۸۰/۱۴$ باشند، آن وقت حاصل ضرب آن‌ها، برابر $۴۸۲۸/۴۳۵$ درمی‌آید، که بیش از ۶ واحد، از حاصل ضرب تقریبی اول، بیشتر است.

بررسی عددهای تقریبی و آشنایی با نظریه محاسبه‌های تقریبی، به ما می‌آموزد که: (۱) با آگاهی بر میزان دقت عددهای مفروض، بتوانیم میزان دقت نتیجه عمل با این عددها را پیدا کنیم؛ (۲) دقت عددهای مفروض را، تا کجا و به چه اندازه انتخاب کنیم تا نتیجه عمل با آن‌ها، همان دقتی را داشته باشد که لازم داریم؛ (۳) چگونه خود را از عمل‌ها یا رقم‌هایی که، در نتیجه کار، تأثیری ندارند، آزاد کنیم و گرفتار عمل‌های طولانی و ملال‌آور (که در ضمن، ضروری نیستند) نشویم.

روش نوشتن عددهای تقریبی

وقتی با مقدارهای تقریبی سروکار داریم، $۲/۴$ با $۲/۴۰$ یا $۰/۰۲$ با $۰/۰۲۰۰$ فرق دارد. $۲/۴$ به این معناست که مقدار عدد ممکن است برابر $۲/۴۳$ یا $۲/۳۸$ باشد (که آن را در رقم اول بعد از ممیز، یعنی رقم دهم، گرد کرده‌ایم). در حالی که $۲/۴۰$ به این معناست که عدد تقریبی ما، ممکن

است برابر $۲/۴۰۳$ یا $۲/۳۹۸$ باشد، نه $۲/۴۲۱$ یا $۲/۳۸۲$.

درمورد عددهای درست، وقتی می‌نویسیم ۴۷۲۰ ، به این معناست که همه رقم‌های آن دقیق‌اند. اگر بخواهیم آن را (به صورت، عددهای بزرگ و مثلاً در فیزیک یا اخترشناسی)، به صورت تقریبی بنویسیم، باید آن را به شکل ۴۷×۱۰^۲ و یا، بهتر از آن، $۴/۷ \times ۱۰^۳$ بنویسیم.

در عدد ۲۵۰۰ ، همه رقم‌ها واقعی‌اند، ولی در عدد $۲/۵ \times ۱۰^۳$ ، تنها دو رقم واقعی‌اند.

همچنین، عدد تقریبی $۰/۰۰۰۰۰۲۱$ را بهتر است به صورت

$$۲/۱ \times ۱۰^{-۶}$$

بنویسیم که به معنای واقعی بودن تنها دو رقم ۲ و ۱ است.

قانون گرد کردن عددها

ضمن محاسبه با عددها، گاهی لازم می‌شود آن‌ها را (چه در مورد عددهای دقیق و چه در مورد عددهای تقریبی) گرد کنیم، یعنی یک یا چند رقم پایانی آن را کنار بگذاریم. برای گرد کردن عددها، باید به این قاعده‌ها توجه کنیم:

قاعده ۱. اگر نخستین رقم از رقم‌هایی را که حذف می‌کنیم، بزرگتر از ۵ باشد، باید به آخرین رقمی که حذف نکرده‌ایم، یک واحد اضافه کنیم. درحالتی هم که نخستین رقم از رقم‌های حذف شده برابر ۵ باشد، ولی به دنبال آن (بلافاصله بعد از آن)، رقم یا رقم‌هایی وجود داشته باشد، باز هم به آخرین رقم حذف شده، یک واحد اضافه می‌کنیم.

اگر بخواهیم عدد $۲۸/۸۷۴$ را در رقم اول بعد از ممیز گرد کنیم، آن را به صورت $۲۸/۹$ می‌نویسیم (رقم اول بعد از ممیز را که ۸ بود، یک واحد اضافه می‌کنیم، زیرا بعد از آن، رقمی بزرگتر از ۵ قرار دارد). عدد $۲۸/۹$ به عدد $۲۸/۸۷۴$ نزدیکتر است تا عدد $۲۸/۸$.

برای این که عدد ۲۵۱/۳۶ را در رقم اول بعد از ممیز، گرد کنیم، آن را به صورت ۳/۳۶ می نویسیم، زیرا نخستین رقم حذف شده ۵ است و بلافاصله به دنبال آن، رقم ۱ قرار دارد. عدد ۳/۳۶ به عدد ۲۵۱/۳۶ نزدیکتر است تا عدد ۲/۳.

قاعده ۲. اگر نخستین رقم از رقم های حذف شده، کوچکتر از ۵ باشد، رقم های باقی مانده را دست نمی زنیم

اگر بخواهیم عدد ۲۷/۴۸ را تا یک واحد تقریب گرد کنیم، آن را به صورت ۲۷ می نویسیم: ۲۷ به ۲۷/۴۸ نزدیکتر است تا ۲۸.

قاعده ۳. اگر بخواهیم با حذف رقم ۵ (وقتی که بعد از آن، رقم دیگری وجود ندارد)، عددی را گرد کنیم، می توان رقم ۵ را بدون تغییر در رقم قبلی حذف کرد و می توان، بعد از حذف آن، به رقم قبلی یک واحد اضافه کرد.

ولی از آن جاکه کار کردن با عددهای زوج، ساده تر از عمل با عددهای فرد است، بهتر است، در حالتی که رقم قبل از ۵، عددی زوج است، آن را تغییر ندهیم، ولی در حالتی که رقم پیش از ۵ فرد است، آن را، با اضافه کردن یک واحد، به رقمی زوج تبدیل کنیم.

عدد ۵/۰۴۶۵ را در رقم سوم بعد از ممیز، به صورت ۵/۰۴۶، و عدد ۵/۰۹۳۵ را در رقم دوم بعد از ممیز، به صورت ۵/۰۹۴ گرد می کنیم.

در این حالت، اضافه کردن یا اضافه نکردن یک واحد به رقم قبلی، میزان اشتباه را تغییر نمی دهد.

مثال. این عددها را، بادقت تا یک دهم تقریب (یعنی رقم اول بعد از ممیز) گرد کنید:

۶/۵۲۷; ۵/۴۵۶; ۲/۱۹۵; ۱/۴۵۰;

۵/۰۹۵۰; ۴/۸۵۱; ۵/۰۸۵۰; ۵/۰۰۵

مثال ۲. پیستون استوانه‌ای، قطری برابر ۳۵ میلی‌متر دارد. با چه دقتی باید آن را اندازه گرفت تا مرز خطای نسبی برابر ۰/۰۵٪ باشد.

حل. بنابر فرض، مرز خطای نسبی، باید ۰/۰۵٪ از ۳۵ میلی‌متر باشد. بنابراین، مرز خطای مطلق، چنین می‌شود:

$$\frac{35 \times 0.05}{100} = 0.0175 \quad (\text{میلی‌متر})$$

و یا، اگر آن را گرد کنیم ۰/۰۲ میلی‌متر.

می‌توانستیم از دستور $\delta = \frac{\Delta}{a}$ استفاده کنیم:

$$a = 35; \delta = 0.0005;$$

$$0.0005 = \frac{\Delta}{35} \Rightarrow \Delta = 0.0175 \quad (\text{میلی‌متر})$$

بحث مربوط به محاسبه با مقدارهای تقریبی (که در عمل، کاربرد بسیار دارد)، هم جالب و هم لازم است؛ ولی در این جا برای طولانی نشدن مطلب و دور نشدن از برنامه درسی، از بررسی تفصیلی مطلب می‌گذریم و تنها به چند قانون اشاره می‌کنیم. ولی یادآور می‌شویم که موضوع، تنها با آوردن این چند قانون پایان نمی‌پذیرد و امیدواریم، در جلد‌های بعدی کتاب، فرصتی به‌دست آید و دنباله این بحث جالب را بگیریم.

قانون ۱. برای پیدا کردن مرز خطای مطلق برای حاصل جمع یا تفاضل دو عدد تقریبی (در مجموع می‌تواند چند جمله وجود داشته باشد)، باید مرز خطای مطلق را در هریک از جمله‌های جمع یا تفریق، پیدا کرد و، سپس، آن‌ها را باهم جمع کرد.

قانون ۲. مرز خطای نسبی، در حاصل ضرب یا خارج قسمت دو عدد، برابر است با مجموع مرزهای خطای نسبی در عامل‌های ضرب یا جمله‌های تقسیم.

۷۸. تناسب.

دو نسبت برابر، تشکیل یک تناسب می‌دهند.

در یک کتاب خانه عمومی ۱۰۰۰۰ کتاب وجود دارد که، در بین آنها، ۸۰۰۰ کتاب به زبان فارسی است. کتاب خانه عمومی دیگری ۱۲۰۰۰ کتاب دارد که، از آنها، ۹۶۰۰ جلد به زبان فارسی است. بنابراین، نسبت تعداد کتاب‌های فارسی، به کل کتاب‌ها، در هر دو کتاب‌خانه، یکی است:

$$۸۰۰۰ : ۱۰۰۰۰ = ۹۶۰۰ : ۱۲۰۰۰ = ۰/۸$$

در این جا، با یک تناسب سروکار داریم که آن را این طور می‌نویسند:

$$۸۰۰۰ : ۱۰۰۰۰ = ۹۶۰۰ : ۱۲۰۰۰ \quad (۱)$$

و می‌خوانند: نسبت ۸۰۰۰ به ۱۰۰۰۰، برابر است با نسبت ۹۶۰۰ به ۱۲۰۰۰. هریک از این چهار عدد یک جمله از تناسب‌اند؛ به دو عدد ۸۰۰۰ و ۱۲۰۰۰، جمله‌های کناری (یا طرفین) و به دو عدد ۱۰۰۰۰ و ۹۶۰۰، جمله‌های میانی (یا وسطین) گویند. دلیل این نام‌گذاری روشن است، جمله‌های کناری، در دو طرف و جمله‌های میانی در وسط قرار گرفته‌اند. برابری (۱)، یعنی تناسب (۱) را، این طور هم می‌نویسند:

$$\frac{۸۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = \frac{۹۶۰۰}{۱۲۰۰۰} \quad (۲)$$

ویژگی اصلی تناسب.

فرض کنیم، دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ باهم برابر باشند:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

اگر دو طرف این برابری را در bd ضرب کنیم، به برابری

$$a \cdot d = b \cdot c$$

می‌رسیم که همان ویژگی اصلی تناسب است:

در هر تناسب، حاصل ضرب جمله‌های کناری، برابر است با حاصل ضرب جمله‌های میانی.

از این ویژگی می‌توان برای پیدا کردن جمله مجهول یک تناسب، استفاده کرد. مثلاً، در تناسب

$$\frac{5}{12} = \frac{x}{84} \quad (1)$$

باتوجه به ویژگی اصلی تناسب داریم:

$$12x = 5 \times 84 \Rightarrow x = \frac{5 \times 84}{12} = 35$$

یادداشت. عادت شده‌است که در تناسبی مثل (۱)، برای پیدا کردن مجهول x ، می‌گویند «طرفین وسطین می‌کنیم». این جمله، به‌جز این که معنای درستی ندارد، نوع عملی را هم که انجام می‌دهیم، مشخص نمی‌کند. اگر قرار باشد که از واژه‌های «طرفین» (به‌جای «جمله‌های کناری») و «وسطین» (به‌جای «جمله‌های میانی») استفاده کنیم، دست‌کم، جمله را به‌طور کامل بیان کنیم و بگوییم: «حاصل ضرب دو جمله طرفین را مساوی حاصل ضرب دو جمله وسطین قرار می‌دهیم». بهتر از همه این است که نوع عمل ریاضی را مشخص کنیم و بگوییم: «در برابری (۱)، دو طرف را در 12×84 ضرب می‌کنیم».

کمیت‌های متناسب

مقدارهای دو کمیت متفاوت، ممکن است به یکدیگر بستگی داشته باشند.

مثلاً، مساحت یک مربع، بستگی به طول ضلع آن دارد و، برعکس، طول ضلع مربع، بستگی به مقدار مساحت آن دارد.

مقداری را متناسب با مقداری دیگر گویند، وقتی که نسبت آن‌ها، عددی ثابت باشد.

مثال. وزن آهن، متناسب با حجم آن است. ۲ سانتی‌متر مکعب آهن ۱۴ گرم، ۵ سانتی‌متر مکعب آن ۳۵ گرم، ۱۲ سانتی‌متر مکعب آن ۸۴ گرم و غیره وزن دارد. در این‌جا

$$\frac{۱۴}{۲} = \frac{۳۵}{۵} = \frac{۸۴}{۱۲} = \dots = ۷$$

متناسب بودن دو کمیت، به معنای آن است که با n برابر شدن یکی از آن‌ها، دیگری هم n برابر می‌شود (n ، عددی گویا است). اگر حجم آهن ۳ برابر شود، وزن آن هم، ۳ برابر می‌شود، اگر حجم آهن نصف شود، وزن آن هم نصف می‌شود.

کمیت‌های متناسب معکوس

اگر دو کمیت چنان باشند که با n برابر شدن یکی، دیگری به $\frac{1}{n}$ خود تبدیل شود، آن‌ها را متناسب معکوس گویند. مثلاً، زمانی که برای رسیدن اتومبیل از شهر A به شهر B لازم است، با سرعت اتومبیل متناسب معکوس است، یعنی نسبت عکس دارد، به زبان دیگر، اگر سرعت اتومبیل دو برابر شود، زمان رسیدن از A به B نصف می‌شود و اگر سرعت اتومبیل نصف شود، زمان رسیدن از A به B ، دو برابر می‌شود.

اگر دو کمیت، در بستگی باهم، متناسب معکوس باشند، آن وقت نسبت دو مقدار از کمیت اول، وقتی با نسبت دو مقدار متناظر از کمیت دوم، یک تناسب تشکیل می‌دهند که عکس یکی از نسبت‌ها را با نسبت دوم برابر قرار دهیم.

$$۶/۵; ۰/۵; ۲/۲; ۱/۴; ۱/۰; ۴/۹; ۰/۸; ۰/۰$$

خطای مطلق و خطای نسبی

به اختلاف مقدار تقریبی یک عدد با مقدار واقعی آن، خطای مطلق گویند. به زبان دیگر، اگر a مقدار تقریبی عدد x باشد، آن وقت $a - x$ (اگر $a > x$) یا $x - a$ (اگر $a < x$)، خطای مطلق نامیده می شود.

اگر کارخانه ای ۱۲۸۴ کارگر و کارمند داشته باشد، وقتی این تعداد را با مقدار تقریبی ۱۳۰۰ بیان کنیم، خطای مطلق برابر $۱۲۸۴ - ۱۳۰۰$ ، یعنی ۱۶، و اگر با مقدار تقریبی ۱۲۸۰ بیان کنیم، خطای مطلق برابر $۱۲۸۰ - ۱۲۸۴$ ، یعنی ۴ می شود.

خطای نسبی مقدار تقریبی، به عددی گفته می شود که از نسبت خطای مطلق بر خود عدد، به دست آید.

اگر در مدرسه ای ۱۹۷ دانش آموز تحصیل کنند و ما آن را به صورت تقریبی ۲۰۰ نفر بیان کنیم، خطای مطلق برابر ۳ و خطای نسبی برابر $\frac{۳}{۱۹۷}$ یا (بعد از گرد کردن) $\frac{۳}{۴۰۰}$ ، یعنی ۱/۵٪ خواهد بود.

پیش می آید که نمی توانیم مقدار دقیق عدد و، در نتیجه خطا را (چه خطای مطلق و چه خطای نسبی) پیدا کنیم؛ ولی همیشه می توانیم عددی را مشخص کنیم که مطمئن باشیم، خطای مقدار تقریبی ما از آن تجاوز نمی کند.

فرض کنید، فروشنده ۳/۶ کیلوگرم هندوانه به شما فروخته است. او هندوانه را با ترازو وزن می کند و سبک ترین وزنه ترازوی او ۵۰ گرمی است. وزن ۳/۶ کیلوگرم یا ۳۶۰۰ گرم تقریبی است و شما از وزن دقیق هندوانه اطلاع ندارید. ولی مسلم است که خطای مطلق از ۵۰ گرم و خطای نسبی

از $\frac{50}{3600}$ ، یعنی به تقریب $1/4\%$ تجاوز نمی‌کند.

عددی را که خطای مطلق از آن تجاوز نمی‌کند (و یا در بدترین وضع، برابر آن است)، خطای مطلق مرزی یا مرز خطای مطلق می‌نامند. به همین ترتیب، عددی را که خطای نسبی از آن تجاوز نمی‌کند (و یا در بدترین حالت، برابر آن است)، خطای نسبی مرزی، یا مرز خطای نسبی گویند.

در مثال مربوط به خرید هندوانه، 50 گرم، مرز خطای مطلق و $1/4\%$ مرز خطای نسبی است.

برای محاسبه با عددهای تقریبی، باید مرز خطا (مطلق و نسبی) برای آن‌ها معلوم باشد. اگر این مقدار، از قبل، معین نشده باشد، می‌توان آن را به دست آورد. روشن است که مرز خطای مطلق، برابر است با نصف واحد آخرین رقم عدد تقریبی.

اگر عددی، به صورت تقریبی $4/78$ داده شده باشد، مرز خطای مطلق آن، عبارت است از $0/005$.

مرز خطای مطلق را با حرف یونانی Δ (دلتا) و مرز خطای نسبی را با حرف یونانی δ (دلتای کوچک)، نشان می‌دهند. اگر مقدار تقریبی عدد را با a نشان دهیم، داریم: $\delta = \frac{\Delta}{a}$.

مثال ۱. طول مدادی را با خط‌کش میلی‌متری اندازه گرفته‌ایم، $17/9$ سانتی‌متر شده است. مرز خطای نسبی این اندازه‌گیری چقدر است؟

حل. در این جا $a = 17/9$ (سانتی‌متر)؛ می‌توان $\delta = 0/1$ (سانتی‌متر) گرفت، زیرا اندازه‌گیری طول مداد، تا دقت 1 میلی‌متر، مشکل نیست، ولی خطای مطلق را نمی‌توان از 1 میلی‌متر کمتر گرفت. در این صورت، خطای نسبی برابر $\frac{0/1}{17/9}$ می‌شود که، با گرد کردن آن، به دست می‌آید:

$$\delta = \frac{0/1}{18} \approx 0/6\%$$

اگر اتومبیلی با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت، فاصله دو شهر را در ۵ ساعت طی کند، با چه سرعتی همین فاصله را در ۳ ساعت طی خواهد کرد؟
 در این جا، زمان و سرعت، متناسب معکوس اند. اگر سرعت مجهول را x فرض کنیم، نسبت سرعت‌ها برابر $\frac{3}{x}$ و نسبت زمان‌ها برابر $\frac{5}{3}$ می‌شود؛ ولی دو کمیت، متناسب معکوس اند، پس باید یکی از این نسبت‌ها را با عکس دیگری، برابر قرار دهیم، تا یک تناسب به دست آید:

$$\frac{60}{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = 100$$

ویژگی‌های دیگر کمیت‌های متناسب

تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را در نظر می‌گیریم. بنابر ویژگی اصلی تناسب داشتیم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

باتوجه به همین نتیجه‌گیری (یعنی این که، از برابری سمت چپ می‌توان برابری سمت راست را نتیجه گرفت و، برعکس، از برابر سمت راست، برابری سمت چپ را)، می‌توان ویژگی‌های دیگری، برای تناسب پیدا کرد:
 (۱) در هر تناسب، می‌توان نسبت‌ها را وارونه کرد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (1)$$

(۲) در هر تناسب، نسبت صورت‌ها، با نسبت مخارج‌ها برابر است، یعنی یک تناسب تشکیل می‌دهند:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (2)$$

(۳) روشن است، اگر یک واحد، به دوطرف برابری اضافه کنیم، درستی برابری به هم نمی‌خورد:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad (3)$$

این عمل را، ترکیب نسبت‌ها در صورت، گویند. می‌توان ترکیب نسبت‌ها را در مخرج انجام داد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \quad (3)'$$

(۴) اگر از دوطرف برابری $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، یک واحد کم کنیم، باز هم به تناسب جدیدی می‌رسیم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad (4)$$

این عمل را، تفصیل نسبت‌ها در صورت، گویند. تفصیل نسبت‌ها را می‌توان در مخرج انجام داد.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} \quad (4)'$$

(۵) ترکیب و تفصیل نسبت‌ها، می‌تواند باهم انجام بگیرد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad (5)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d} \quad (5)'$$

در (۵)، ترکیب در صورت و تفصیل در مخرج انجام گرفته است و در (۵)' برعکس.

(۶) مقدار هریک از نسبت‌های $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ را برابر m می‌گیریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = m$$

از آن‌جا، به‌دست می‌آید:

$$a = mb; c = md$$

از مجموع این دو برابری نتیجه می‌شود:

$$a + c = (b + d)m \Rightarrow m = \frac{a + b}{c + d}$$

به این ترتیب، با فرض $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{d + d} \quad (۶)$$

ویژگی (۶) را می‌توان عام‌تر کرد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{na + qc}{nb + qd} \quad (۶)'$$

(خودتان، درستی آن را ثابت کنید).

ویژگی (۶) یا $(۶)'$ ، برای برابری چند نسبت هم درست است:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{a + c + e + \dots}{b + d + f + \dots} \quad (۶)''$$

(۷) اگر در یک تناسب، دو جمله میانی یا دو جمله کناری باهم برابر

باشند:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \text{یا} \quad \frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

$$x^2 = ab \Leftrightarrow x = \sqrt{ab}$$

می‌رسیم که، در این صورت، x را واسطه هندسی یا میانگین هندسی دو عدد « a و b » گویند. ۴ میانگین هندسی دو عدد ۲ و ۸؛ یا ۱۰ میانگین هندسی دو عدد ۵ و ۲۰ است، زیرا

$$4^2 = 2 \times 8 \text{ و } 10^2 = 5 \times 20$$

□

«مفهوم «درصد» بستگی نزدیکی با مفهوم نسبت دارد و نیازهای زندگی و عمل، آن را پدید آورده‌است. به احتمال زیاد، نخستین کسانی که از واژه «درصد» استفاده کرده‌اند، رباخواران و صراف‌ها، یعنی «پدربزرگان» بانک‌های بوده‌اند ولی در زمان ما، به‌جز بانک‌ها (که برای محاسبه بهره پولی که به وام می‌دهند، از واژه «درصد» استفاده می‌کنند)، مفهوم «درصد» در تمامی زندگی اقتصادی ریشه دوانده است. تنها بانک‌ها نیستند که میزان «درصد» سود خود را محاسبه می‌کنند، بلکه به‌طور کلی، در هر کار اقتصادی (به‌ویژه در جهان سرمایه‌داری)، باید این سه مسأله را در نظر داشت:

۱. تعیین «درصد» سوددهی سرمایه‌ای که به‌کار افتاده است؛
۲. تعیین سرمایه، بعد از مدتی که با «درصد» معینی سود کار کرده‌است؛
۳. تعیین «درصد»، برای این که سرمایه‌ای را در طول مدت معینی، به مقدار معلومی برساند.

به‌جز این، از مفهوم «درصد»، در تعیین رشد اقتصادی، رشد جمعیت و بر پایه آن، طرح برنامه‌های لازم برای توسعه اقتصادی و کنترل جمعیت استفاده می‌شود... باید گفت که، در روزگار ما، در هرگام، به مفهوم «درصد» نیاز داریم.

برای درصد از نماد % استفاده می‌شود که، درواقع، تحریفی از نماد ۱۰۰ است (عدد ۱ را کج کرده‌اند و صفرها را به دوطرف آن، کمی بالا و کمی پایین آورده‌اند).

ولی مفهوم‌های «نسبت» و «تناسب»، عمری درازتر دارند.

مفهوم تناسب، به معنای برابری دو نسبت از عددهای طبیعی، از زمانی بسیار کهن به کار می‌رفته است. در سرزمین‌های عیلام و بابل هزاران سال پیش از میلاد، با شناختن مثلث‌های متشابه، به مفهوم «ضلع‌های متناسب» (البته، برای عددهای طبیعی) رسیده بودند.

فیثاغورث (نزدیک سال‌های ۵۸۰ تا ۵۰۰ پیش از میلاد)، دانشمند یونان باستان و هواداران او، برای نخستین بار، نظریه ریاضی نسبت‌ها را مطرح کردند. آن‌ها، سه گونه تناسب را، برای عددهای طبیعی a ، b ، c و d ، مورد بررسی قرار دادند:

تناسب حسابی: $a - b = c - d$ ؛

تناسب هندسی: $a : b = c : d$ ؛

تناسب توافقی: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$.

مفهوم «میانگین» (میانگین حسابی، میانگین هندسی و میانگین توافقی) هم متعلق به فیثاغوریان و مربوط به حالتی است که دو جمله میانی تناسب، با هم برابر باشند.

در سده چهارم پیش از میلاد، «اودوکس» (نزدیک به سال‌های ۴۰۸ تا ۳۵۵ پیش از میلاد)، دانشمند یونانی، بررسی منطقی را درباره ویژگی‌های تناسب (نه فقط تناسب‌های با عددهای طبیعی، بلکه در ضمن با عددهای کسری مثبت) انجام داد. اودوکس، دانشمندی بود که به همه دانش‌های زمان خود، تسلط داشت. او اخترشناس و ریاضی‌دان بود، دانش «مکانیک» را پیش برد و، در ضمن، پزشکی معتبر بود.

تنظیم دقیق نظریه تناسب‌ها، به وسیله اقلیدس، هندسه‌دان یونانی، در

کتاب مشهور او به نام «مقدمات» (که شامل ۱۳ بخش بود) و در سده سوم پیش از میلاد، انجام گرفت. او، این نظریه را، در بخش پنجم کتاب خود، و در اساس، بر پایه آموزش‌های اودوکس، آورده‌است. نظریه امروزی نسبت‌ها، که در کتاب‌های درسی آمده است، با نظریه اقلیدس - اودوکس، خیلی کم اختلاف دارد. اقلیدس، تناسب هندسی را، این‌طور تعریف کرده‌است (مضمون سخن اقلیدس، به زبان امروزی):

«چهار عدد a, b, c, d ، تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را تعریف می‌کنند، به شرطی که، برای عددهای طبیعی ولی دلخواه m و n : اگر $ma > nb$ ، آنوقت $mc > nd$ ؛ اگر $ma = nb$ ، آنوقت $mc = nd$ ؛ و سرانجام، اگر $ma < nb$ ، آنوقت $mc < nd$.

تمرین‌ها

۱۲۱. آیا عمل ساده‌کردن کسر تمام شده‌است:

$$1) \frac{1020}{1870} = \frac{102}{187};$$

$$2) \frac{312}{546} = \frac{156}{273} = \frac{52}{91}$$

۱۲۲. آیا برای انجام این عمل‌ها، ساده‌ترین راه انتخاب شده‌است:

$$1) 78\frac{5}{6} + 24\frac{3}{4} = \frac{473}{6} + \frac{99}{4} =$$

$$= \frac{946 + 297}{12} = \frac{1243}{12} = 103\frac{7}{12};$$

$$2) 97\frac{5}{6} - 32\frac{7}{9} = \frac{587}{6} - \frac{295}{9} =$$

$$= \frac{1761 - 590}{18} = \frac{1171}{18} = 65\frac{1}{18};$$

$$۳) ۵ \frac{۱۷}{۲۴} \times ۳ = \frac{۱۳۷}{۲۴} \times ۳ = \frac{۱۳۷ \times ۳}{۲۴} =$$

$$= \frac{۱۳۷}{۸} = ۱۷ \frac{۱}{۸};$$

$$۴) ۱۸ \frac{۳}{۵} : ۲ = \frac{۹۳}{۵} : ۲ = \frac{۹۳}{۵} \times \frac{۱}{۲} =$$

$$= \frac{۹۳}{۱۰} = ۹ \frac{۳}{۱۰};$$

$$۵) \frac{۵}{۱۸} + \frac{۱۱}{۲۴} = \frac{۵ \times ۲۴ + ۱۱ \times ۱۸}{۱۸ \times ۲۴} =$$

$$= \frac{۳۱۸}{۴۳۲} = \frac{۵۳}{۷۲};$$

$$۶) ۱۷ \frac{۵}{۱۴} \times ۲ \frac{۲}{۲۷} = \frac{۲۴۳}{۱۴} \times \frac{۵۶}{۲۷} =$$

$$= \frac{۱۳۶۰۸}{۳۷۸} = ۳۶$$

۱۲۳. ۱۵ عدد پیدا کنید که از $\frac{۱}{۳}$ بزرگتر و از $\frac{۱}{۴}$ کوچکتر باشند (یعنی

هر ۱۵ عدد بین دو عدد $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ واقع باشند).

۱۲۴. از دو عدد مثبت a و $\frac{۱}{a}$ ، کدام بزرگترند؟ اگر a بتواند عددی

منفی هم باشد، چطور؟

۱۲۵. از دو کسری که صورت‌های برابر دارند (مثل $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۵}{۸}$)، کدام

بزرگترند؟ چرا؟

۱۲۶. از این کسرهای، کدام بزرگتر از $\frac{۱}{۴}$ و کدام کوچکتر از $\frac{۱}{۴}$ هستند؟

$$\frac{۳}{۵}; \frac{۳}{۷}; \frac{۴}{۷}; \frac{۴}{۹}; \frac{۵}{۹}; \frac{۵}{۱۲}; \frac{۷}{۱۲}; \frac{۱۳}{۲۴}$$

۱۲۷. بدون این که به یک مخرج تبدیل کنید، بگویید، کدام بزرگترند؟

$$\begin{aligned} & (۱) \frac{۱۵}{۲۸} \text{ یا } \frac{۱۷}{۱۸} ; (۲) \frac{۷}{۸} \text{ یا } \frac{۵}{۶} ; (۳) \frac{۷}{۱۲} \text{ یا } \frac{۳}{۸} ; (۴) \frac{۳}{۸} \text{ یا } \frac{۵}{۱۲} ; \\ & (۵) \frac{۱۰۳}{۹۷} \text{ یا } \frac{۹۷}{۹۱} \end{aligned}$$

۱۲۸. مطلوب است: $\frac{۷}{۸}$ عدد ۱۶۸؛ $\frac{۳}{۵}$ عدد $\frac{۲۰}{۲۷}$ ؛ $\frac{۵}{۱۲}$ عدد $\frac{۲۲}{۲۵}$ ؛

$\frac{۱}{۲}$ از عدد $\frac{۱}{۱۲}$.

۱۲۹. مطلوب است عددی که: $(۱) \frac{۱۳}{۱۵}$ آن برابر ۱۹۵ است؛

$(۲) \frac{۱۷}{۲۳}$ آن برابر ۵۱ است، $(۳) \frac{۵}{۱۲}$ آن برابر $\frac{۱}{۶}$ است.

۱۳۰. ۱۸۰ نفر را، که $\frac{۶}{۲۳}$ داوطلبان بودند، به آموزشگاه عالی پذیرفتند، تعداد داوطلبان را پیدا کنید.

۱۳۱. قطار مسافری فاصله بین دو شهر را در $\frac{۴}{۵}$ ساعت و قطار بازی

در $\frac{۲}{۳}$ ساعت می‌پیماید. سرعت قطار مسافری ۲۶ کیلومتر در ساعت از سرعت قطار بازی بیشتر است. فاصله بین دو شهر چند کیلومتر است؟

۱۳۲. این عمل‌ها را انجام دهید:

$$۱) \frac{(۲۴\frac{۴}{۹} : ۸ - ۱۵ : ۷\frac{۱}{۵}) \times ۷ - ۱\frac{۱}{۴}}{۴ - (۱\frac{۸}{۶۳} + \frac{۳۵}{۵۴} + ۱\frac{۲۵}{۴۲}) : ۱\frac{۱}{۸}}$$

$$۲) \frac{۶ - (۳۷\frac{۱}{۵} : ۱۸ - ۵ : ۳\frac{۴}{۷}) \times ۳}{۶\frac{۳}{۱۰} \times (\frac{۲۹}{۳۰} + \frac{۱۴}{۴۵} + \frac{۴۷}{۵۴}) - ۱۳}$$

$$۳) \frac{\left[\left(\frac{۲۳}{۳۶} + \frac{۳۱}{۶۳} \right) - \left(\frac{۳}{۴} + \frac{۵}{۲۱} \right) \right] \times ۴۸ : \left(\frac{۳}{۵} : \frac{۷}{۸} \right)}{\left(\frac{۱۹}{۲۶} + \frac{۱۴}{۳۹} - \frac{۱}{۶} \right) \times ۵۴ \frac{۱}{۶} : \left(۸ \frac{۴}{۷} : \frac{۱۲}{۳۵} \right)}$$

۱۳۳. الف) یک عدد دهدهی (اعشاری) را چگونه در ۱۰، ۱۰۰،

۱۰۰۰ و غیره ضرب کنیم؟ ب) در تقسیم براین عددها چه باید کرد؟

۱۳۴. این کسره‌های متعارفی را؛ بدون استفاده از عمل تقسیم صورت

بر مخرج، به کسر دهدهی تبدیل کنید:

$$\frac{۵}{۸}; \frac{۱۹}{۲۵}; \frac{۳}{۴۰}; \frac{۶}{۱۲۵}; \frac{۱۵۱}{۳۲۰}; \frac{۳۱۲}{۶۲۵}$$

۱۳۵. عمل‌ها را انجام دهید:

$$۱) ۱ : \frac{۰/۱ - ۰/۰۹}{۰/۶ - ۰/۵۸};$$

$$۲) ۰/۱ + ۰/۵ \times \frac{۲/۴ - ۰/۹ : (۱ - ۰/۴)}{(۲ - ۱/۶۴) : ۰/۹ + ۰/۱};$$

$$۳) (۲/۳۱۴ - \frac{۱}{۴}) : ۰/۰۲ + (۳\frac{۳}{۸} + ۱/۴۲۵) : ۶$$

۱۳۶. ۱۰۰۰ کیلوگرم خیار را که ۹۷٪ آب دارد، اندکی خشک کردیم،

میزان آب به ۹۶٪ تقلیل پیدا کرد. حالا وزن خیارها چقدر است؟

۱۳۷. دو کارگر، یکی بلند و دیگری کوتاه، در یک لحظه از محل مشترک

زندگی خود، به طرف کارخانه حرکت می‌کنند. طول هرگام کارگر کوتاه ۲۰٪

از طول هرگام کارگر بلند کمتر است، در عوض در هر فاصله زمانی، ۲۰٪

بیشتر از رفیق خود گام برمی‌دارد. کدام زودتر به کارخانه می‌رسند؟

۱۳۸. زغال‌سنگ، در لحظه استخراج ۲٪ آب دارد، ولی وقتی دو

شبهانه‌روز در هوای آزاد بماند، میزان آب آن ۱۲٪ می‌شود. به هر ۱۰۰ کیلوگرم

زغال‌سنگ استخراج‌شده، بعد از دو شبهانه‌روز، چه وزنی اضافه می‌شود؟

۱۳۹. وقتی آب، یخ ببندد، ۹٪ به حجم آن اضافه می‌شود. وقتی یک قطعه یخ آب شود، چند درصد از حجم آن کاسته می‌شود؟

۱۴۰. قیمت هر جلد چاپ دوم یک کتاب ۱۲۰٪ چاپ اول آن بود، ولی چاپ سوم کتاب، نسبت به قیمت چاپ دوم، ۲۰٪ ارزان‌تر بود، کدام ارزان‌ترند، چاپ اول یا چاپ سوم کتاب؟

۱۴۱. با ابتکار مهندس A ، ۷۰٪ مصرف سوخت یک واحد تولیدی کاهش یافت و، سپس، با ابتکار مهندس B ، دوباره ۳۰٪ از مصرف سوخت کاسته شد. در مصرف سوخت این واحد تولیدی، چند درصد صرفه‌جویی شده‌است؟

۱۴۲. در یک قطار مسافری، ۷۰٪ مسافرها ایرانی و، در ضمن ۷۰٪ مسافرها، مردند. آیا می‌توان نتیجه گرفت اکثریت مسافران قطار، مردان ایرانی‌اند؟

۱۴۳. ببینید، چند درصد را تشکیل می‌دهد:

$$(۱) \ ۲۵ \text{ از } ۳۷۵ \quad (۲) \ ۸\frac{۳}{۴} \text{ از } ۲۵۰ \quad (۳) \ \frac{۳}{۸} \text{ از } \frac{۵}{۷} \quad (۴) \ ۰/۰۷$$

از ۲/۵؟

۱۴۴. جمعیت شهری ۵۵۰۰۰ نفر است و می‌دانیم، در طول ۱۰ سال، ۱۰٪ به جمعیت شهر افزوده می‌شود. ده سال قبل، جمعیت این شهر چند نفر بوده‌است؟

۱۴۵. عدد p را به سه بخش طوری تقسیم کنید که نسبت آن‌ها، برابر $۲ : ۳ : ۷$ باشد.

۱۴۶. در مثلث قائم‌الزاویه ABC می‌دانیم:

$$\hat{A} = ۹۰^\circ \text{ و } \hat{C} = ۳۰^\circ$$

از رأس A ، ارتفاع، نیمساز و میانه وارد بر وتر را رسم کرده‌ایم. این سه پاره‌خط راست، زاویه قائمه را به چه نسبت‌هایی تقسیم می‌کنند؟

۱۴۷. پیاده‌ای روی هم پنج روز پیاده‌روی کرده‌است و می‌دانیم مسافتی را که در این روزها پیموده‌است، به‌نسبت $۲ : ۳ : ۴ : ۶ : ۲$ بوده‌است. اگر در دوروز آخر، روی هم ۴۵ کیلومتر پیاده‌روی کرده‌باشد، در پنج روز چند کیلومتر طی کرده‌است؟

۱۴۸. دو ظرف داریم، یکی خالی و دیگری پراز آب. اگر همه آب ظرف دوم را در ظرف خالی بریزیم، $\frac{1}{5}$ آن بدون آب می‌ماند. نسبت حجم‌های دو ظرف را پیدا کنید.

۱۴۹. سه ظرف داریم، اولی پراز آب و دوتای دیگر خالی. اگر ظرف اول را در ظرف دوم خالی کنیم، $\frac{1}{5}$ ظرف دوم بدون آب می‌ماند؛ ولی اگر از ظرف اول در ظرف سوم بریزیم، ظرف سوم پر می‌شود و به‌اندازه $\frac{1}{3}$ آب ظرف اول، در ظرف اول باقی می‌ماند. حجم‌های سه ظرف به چه نسبت‌هایی هستند؟

۱۵۰. ۹۲٪ یک خربزه آب است. ۲، ۳، یا ۱۰۰ خربزه، چنددرصد آب دارند؟

۱۵۱. مجموع دو عدد برابر است با ۱۲۰. این عددها را پیدا کنید، به‌شرطی که بدانیم ۴۰٪ یکی برابر است با ۶۰٪ دیگری.

۱۵۲. عددی برابر ۵۰٪ عدد دوم است. چنددرصد عدد اول، برابر عدد دوم می‌شود؟

۱۵۳. مساحت مربع از روی ضلع آن تعیین می‌شود. آیا ضلع مربع با مساحت آن متناسب است؟

۱۵۴. ضلع مربعی را ۲۰٪ بزرگ کرده‌ایم. مساحت مربع، چنددرصد بزرگ می‌شود؟

۱۵۵. عدد اول ۲۵٪ از عدد دوم بزرگتر است. عدد دوم چنددرصد، از عدد اول کوچکتر است؟

۱۵۶. پیاده‌ای، فاصله بین دو نقطه A و B را در $۵\frac{1}{۴}$ ساعت طی کرد. ابتدا در جاده شوسه و بعد در مسیر بدون جاده. نسبت زمانی که در جاده شوسه صرف کرده، به زمانی در مسیر بدون جاده بوده، برابر است با نسبت $۱/۶ : ۲\frac{۲}{۱۵}$. سرعت این شخص در جاده شوسه چقدر بوده است، به شرطی که بدانیم مسیر بدون جاده را با سرعت $۳/۶$ کیلومتر در ساعت طی کرده و طول مسیر بدون جاده، برابر $۳۷/۵\%$ تمامی راه بوده است؟

۱۵۷. مقدار x را پیدا کنید:

$$۱) \frac{۵+x}{۲+x} = \frac{۴}{۳};$$

$$۲) \frac{۹+x}{x} = ۴; \quad ۳) \frac{۱۰-x}{x} = ۴;$$

$$۴) \frac{a+x}{x} = a+۱; \quad ۵) \frac{a-x}{x} = \frac{a}{b}$$

۱۵۸. x و y را پیدا کنید.

$$۱) x:y = ۲:۳ \text{ و } x+y = ۱۰;$$

$$۲) \frac{x}{۵} = \frac{y}{۳} \text{ و } x-y = ۶;$$

$$۳) \frac{x}{y} = \frac{۲a}{b} \text{ و } x+y = a+b;$$

$$۴) \frac{x}{y} = \frac{a+b}{a-b} \text{ و } x-y = ۲a$$

۱۵۹. می‌دانیم $\frac{am-bn}{am+bn} = \frac{۱}{۱۱}$ و $\frac{m}{n} = \frac{۳}{۲}$. مقدار نسبت $\frac{a}{b}$ را

پیدا کنید.

۱۶۰. می‌دانیم $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ و $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. ثابت کنید:

(۱) $\frac{am}{bn} = \frac{cp}{dq}$ ، یعنی از ضرب جمله به جمله دو تناسب، یک تناسب جدید تشکیل می‌شود

(۲) $\frac{an}{bm} = \frac{cq}{dp}$ ، یعنی اگر دو تناسب را جمله به جمله برهم تقسیم کنیم، خارج قسمت‌ها، یک تناسب تشکیل می‌دهند.

۱۶۱. می‌دانیم $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ و $\frac{y}{z} = \frac{6}{5}$. مطلوب است مقدار $\frac{z}{x}$.

۱۶۲. می‌دانیم $\frac{a}{b} = \frac{1}{4}$ و $\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{3}$. مقدار هریک از نسبت‌های aa_1

به bb_1 و $\frac{a}{a_1}$ به $\frac{b}{b_1}$ را پیدا کنید.

۱۶۳. عدد ۳۸۴۰ را به نسبت عکس عددهای ۷ و ۸ تقسیم کنید.

* ۱۶۴. در مساله‌های عملی، توصیه می‌کنند که می‌توان حجم مخروط

یا هرم ناقص را، به تقریب، از روی دستور

$$V = \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot h \quad (1)$$

به دست آورد دراین دستور، S_1 و S_2 مقدار مساحت‌های دو قاعده و h مقدار ارتفاع مخروط یا هرم ناقص است.

دستور تقریبی (۱)، در چه موردهایی، خطای محاسبه را بالا می‌برد و

نمی‌تواند مورد استفاده قرار گیرد؟

۱۶۵. به کسر دهمی تبدیل کنید:

$$\frac{2}{5}; \frac{1}{4}; \frac{74}{25}; \frac{8}{9}; \frac{2}{11};$$

$$\frac{1}{7}; \frac{4}{7}; \frac{1}{13}; \frac{5}{13}; \frac{7}{15}; \frac{1}{12}$$

۱۶۶. به کسر متعارفی تبدیل کنید:

$$0/125; 1/484; 0/(39); 1/(783); 0/(185); 0/2(7);$$

$$4/3(27); 0/15(3); 0/(9); 0/2(9)$$

*۱۶۷. کسر $\frac{1}{p}$ (عددی است اول)، ضمن تبدیل به کسر دوره‌ای

دهدهی و در دوره گردش خود، حداکثر چند رقم می‌تواند داشته‌باشد؟

*۱۶۸. برای تبدیل کسر دوره‌ای دهدهی (ساده یا مرکب) به کسر

متعارفی از قاعده‌هایی استفاده می‌کنید. این قاعده‌ها را ثابت کنید.

۶. مجموعه عددهای حقیقی

۱۵. اندکی تاریخ

فیثاغورث، ریاضی دان یونانی که پیش از میلاد مسیح زندگی می کرد و، همچنین هواداران او، برای عدد اهمیتی خاص قائل بودند. آن ها، اعتقاد داشتند نه تنها طول و سطح و حجم و وزن و زمان را می توان به یاری عدد مشخص کرد، بلکه پیامدهای بغرنج تری از نوع نواهای موسیقی، غم و شادی، آرامش و التهاب و ... هم با عدد قابل بیان اند. به این ترتیب، آن ها، عدد را سرچشمه شناخت همه پدیده های مادی و معنوی می دانستند و می گفتند «چیزی در جهان وجود ندارد که به کمک عدد، قابل بیان نباشد».

افلاطون که یکی از هواداران فلسفه فیثاغورث بود، در کتاب «جمهور» خود، معتقد به «اعجاز» عدد است و گمان می کند، به کمک عدد، می توان زندگی و پیش آمدهای آینده را پیش بینی کرد.

البته، در سرزمین عیلام و بابل هم، قرن ها پیش از دوره زرین یونان باستان، اعتقادهای نادرستی درباره عدد داشتند و، مثلاً هریک از خدایان مورد پرستش خود را، با عددی مشخص می کردند و، بسیار احتمال دارد که فیثاغورث، دیدگاه های فلسفی خود را از آن ها گرفته باشد. همین اعتقادهای نادرست را، باید سرچشمه بسیاری از دیدگاه های خرافی بشر نسبت به عدد دانست که مثلاً «هفت» عددی مقدس و یا «سیزده» عددی نحس است.

از طرف دیگر، ریاضی دانان یونان باستان، عدد را به معنای نسبت دو عدد طبیعی می شناختند و، اغلب، گمان می کردند، هر عددی را می توان به وسیله نسبت دو عدد طبیعی نشان داد.

خود فیثاغورث، یا یکی از هواداران او، قضیه ای از هندسه را که هنوز معروف به «قضیه فیثاغورث» است - کشف کرد. بنابراین قضیه، اگر ضلع های

پهلوی زاویه قائمه در مثلث قائم‌الزاویه را، با طول‌های a و b ، و وتر آن را با طول c فرض کنیم، همیشه داریم:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

البته، ریاضی‌دانان عیلامی و بابلی و مصری، ده‌ها سده پیش از ریاضی‌دانان یونانی، از حالت‌های خاص این قضیه آگاه بودند و، مثلاً می‌دانستند، مثلث با ضلع‌های به طول ۳ و ۴ و ۵، یک مثلث قائم‌الزاویه است. هنوز هم، در بسیاری کتاب‌ها، این مثلث را «مثلث مصری» می‌نامند. ولی در یونان، قضیه را در حالت کلی خود ثابت کردند. این مطلب را هم یادآوری کنیم، اگر طول ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه، با عددهای درست (و البته مثبت) بیان شده‌باشد، آن را «مثلث فیثاغوری» می‌نامند. مثلاً مثلث مصری، یا مثلث با ضلع‌های به طول ۵ و ۱۲ و ۱۳ یا ۷ و ۲۴ و ۲۵، مثلث‌های فیثاغوری هستند، زیرا

$$3^2 + 4^2 = 5^2; 5^2 + 12^2 = 13^2;$$

$$7^2 + 24^2 = 25^2$$

ولی هواداران فیثاغورث، که گمان می‌کردند، پدیده‌های معنوی را هم، می‌توان به یاری عدد توضیح داد، از بیان طول قطر مربعی که طول ضلع آن، برابر واحد باشد، درماندند.

مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی را درنظر بگیریم که طول هر ضلع پهلوی زاویه قائمه آن برابر ۱ باشد. هواداران فلسفه فیثاغورث، نتوانستند، دو عدد طبیعی پیدا کنند که نسبت آن‌ها، برابر با طول وتر این مثلث باشد: نسبت دو عدد طبیعی ۷ و ۵، یعنی $\frac{7}{5}$ ، یا $\frac{1}{4}$ ، به تقریب، برابر طول این وتر است. ولی از آن کمتر است؛ نسبت دو عدد ۳ و ۲، یعنی $\frac{3}{2}$ یا $\frac{1}{5}$ ،

بازهم به تقریب، برابر طول وتر، ولی از آن بیشتر است. $\frac{141}{100}$ یا $1/41$ از طول وتر کمتر و $\frac{71}{50}$ یا $1/42$ از طول وتر بیشتر است. همچنین $1/414$ از طول وتر کمتر و $1/415$ از طول وتر بیشتر است. درواقع، باید مجذور طول وتر برابر ۲ شود؛ ولی

$$1/4^2 = 1/96 < 2; 1/5^2 = 2/25 > 2;$$

$$1/41^2 = 1/9881 < 2; 1/42^2 = 2/0764 > 2;$$

$$1/414^2 = 1/999396 < 2; 1/415^2 = 2/002225 > 2$$

و هرچه کار را ادامه دهیم، به عددی دهمی نمی‌رسیم که، مجذور آن، برابر ۲ باشد. [البته، هواداران فیثاغورث و دیگر ریاضی‌دانان یونانی، عددهای دهمی را نمی‌شناختند؛ آن‌ها تنها با کسرها، یعنی نسبت عددهای طبیعی کار می‌کردند، ولی ما برای سادگی کار از کسرهای دهمی استفاده کردیم.]

این رویداد، برای فلسفه فیثاغورث، مسأله زندگی و مرگ بود: وقتی نتوان، یک پاره‌خط راست ساده را، با عدد بیان کرد، چگونه می‌توان ادعا کرد، اندوه و ترس و شادی و دلیری، با عدد قابل توضیح‌اند.

انجمن‌های هوادار فلسفه فیثاغورث، انجمن‌هایی پنهانی بودند، آن‌ها بین خود، پدیده‌ها را به دوگونه بخش کردند. اول آن‌ها که با عدد (یعنی نسبت دو عدد طبیعی) قابل بیان هستند؛ این پدیده‌ها را گویا (یا مُنطق) نامیدند. دوم آن‌هایی که با عدد غیرقابل بیان هستند که نام گنگ (یا اصم) را به آن‌ها دادند. بنابراین

طول قطر مربع به ضلع واحد، گنگ است، یعنی (به اعتقاد هواداران فیثاغورث)، به‌کمک عدد (یا دقیق‌تر، نسبت دوعدد درست) قابل بیان نیست. هواداران فیثاغورث، از هندسه هم، برای نجات فلسفه خود یاری گرفتند، ولی در آن‌جا هم به نتیجه‌ای نرسیدند: اگر طول ضلع مربعی را واحد فرض

کنیم، نمی‌توان طول قطر این مربع را (به کمک طول ضلع آن) اندازه گرفت. به همین مناسبت، در هندسه، این گونه پاره‌خط‌های راست را، اندازه‌ناپذیر، خواندند.

هواداران فیثاغورث، این راز را از دیگران پنهان می‌کردند، ولی سرانجام، مثل هر مورد مشابه خود، این راز هم از پرده بیرون افتاد و، باوجودی که فاش‌کننده آن را کشتند (در آب غرق کردند)، فلسفه ذهنی و غیرواقعی آن‌ها، نتوانست جان سالم به در برد.

«نظریه نسبت‌ها» و «نظریه اندازه‌ناپذیرها»، در تمام دوران ریاضیات یونانی و، سپس، در بین ریاضی‌دانان ایرانی، مورد بحث بود و، سرانجام، همین‌ها، یعنی ریاضی‌دانان ایرانی، مثل کرجی و خیام و توسی و جمشید کاشانی، تاحد زیادی آن را حل کردند.

۲۴. عددهای گنگ

می‌دانیم، نسبت دو عدد درست، همیشه قابل تبدیل به کسر ددهمی است؛ البته، این کسر ددهمی ممکن است تحقیقی یا دوره‌ای (ساده یا مرکب) باشد. ولی می‌توان کسر ددهمی را طوری نوشت که نه تحقیقی باشد، نه دوره‌ای. مثلاً کسر ددهمی را به این ترتیب می‌سازیم که، بعد از ممیز، پشت سرهم، عددهای فرد نوشته شده باشد:

۰/ ۱۳۵۷۹۱۱۱۳۱۵۱۷۱۹۲۱۲۳...

این کسر ددهمی، بی‌پایان است و می‌توان ثابت کرد که، دوره گردشی ندارد. بنابراین، نمی‌توان آن را به صورت کسر متعارفی، یعنی نسبت دو عدد درست، درآورد. چنین عددی را گنگ گویند.

هر عددی که قابل تبدیل به نسبت دو عدد درست نباشد، عددی گنگ است.

طول قطر مربعی که طول ضلع آن، برابر ۱ باشد، برابر است با $\sqrt{2}$ ، و $\sqrt{2}$ عددی است گنگ.

اگر a عددی درست باشد؛ درضمن، مجذور یک عدد درست نباشد، آنوقت، عدد $\sqrt{a}$ ، عددی گنگ است.

به عنوان نمونه، ثابت می‌کنیم $\sqrt{v}$ ، عددی گنگ است، یعنی به فرض درست بودن دو عدد m و n ، نمی‌توان $\sqrt{v}$ را به صورت نسبت $\frac{m}{n}$ نوشت: از برهان خُلف استفاده می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم، عدد $\sqrt{v}$ را بتوان به صورت $\frac{m}{n}$ نوشت و، بعد، نتیجه می‌گیریم که چنین فرضی ما را به بُن‌بست می‌کشاند.

$\frac{m}{n}$ را کسری ساده‌نشده فرض می‌کنیم، یعنی m و n نسبت به هم، اول‌اند. بزرگترین بخش‌یاب مشترک دو عدد m و n برابر است با واحد (دو عدد m و n ، با هم، جز واحد، بر هیچ عدد دیگری، بخش‌پذیر نیستند). اکنون فرض می‌کنیم $\sqrt{v}$ عدد گویا باشد و داشته باشیم:

$$\sqrt{v} = \frac{m}{n} \Rightarrow v = \frac{m^2}{n^2}$$

از این جا به دست می‌آید:

$$m^2 = vn^2 \quad (*)$$

سمت راست برابری بر v بخش‌پذیر است، پس باید m^2 ، یعنی m هم بر v بخش‌پذیر باشد و داشته باشیم: $(k \in \mathbb{Z}) m = vk$. به جای m در برابری $(*)$ می‌گذاریم:

$$v^2 k^2 = vn^2 \Rightarrow vk^2 = n^2$$

و از این برابری، باید نتیجه گرفت، عدد n بر v بخش‌پذیر است.

m و n را نسبت به هم اول گرفته بودیم، ولی اگر $\sqrt{7}$ را برابر $\frac{m}{n}$ بگیریم، به این نتیجه می‌رسیم که، هر دو عدد m و n ، بر ۷ بخش پذیر هستند. این نتیجه، فرض ما را نقض می‌کند، یعنی درواقع، فرض ما نادرست بوده است و نمی‌توان $\sqrt{7}$ را به صورت کسر $\frac{m}{n}$ نوشت: $\sqrt{7}$ یک عدد گنگ است. تعداد عددهای گنگ، بی‌نهایت است؛ از این جالب‌تر، بین هر دو عدد گویا، پایین هر دو عدد گنگ، یا بین یک عدد گویا و یک عدد گنگ، بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

مجموعه همه عددهای گویا و گنگ را، مجموعه عددهای حقیقی گویند. می‌دانید برای محاسبه محیط یا مساحت دایره، از عدد π (پی) استفاده می‌کنیم و آن را به تقریب برابر $3/14$ می‌گیریم. ولی π عددی گنگ است و در نمایش دهدهی آن، هر قدر جلو برویم، به پایان نمی‌رسد، هیچ‌گونه نظمی در رقم‌های دهدهی این عدد وجود ندارد و قابل تبدیل به نسبت دو عدد درست نیست، پس π ، و همچنین مضرب‌های درست آن، عددهایی گنگ هستند. در این‌جا، مقدار π و نتیجه برخی عمل‌های با آن را تا ۵ رقم بعد از ممیز داده‌ایم.

$$\pi = 3/14159; \frac{\pi}{4} = 1/57079;$$

$$\frac{1}{\pi} = 0/31831; \frac{1}{2\pi} = 0/15915;$$

$$\pi^2 = 9/86960; \sqrt{n} = 1/77245$$

جسمی که از یک بلندی به طرف زمین رها شود (به شرطی که از نیروی مقاومت هوا صرف نظر کنیم)، ضمن سقوط خود شتاب می‌گیرد، به این ترتیب که به تقریب، در ثانیه اول ۵ متر، در ثانیه دوم ۱۵ متر، در ثانیه سوم ۲۵ متر، در ثانیه چهارم ۴۵ متر و ... حرکت می‌کند، یعنی در هر ثانیه، به تقریب ۱۰

متر بیشتر از ثانیه قبل. این ۱۰ متر را «شتاب ثقل» زمین می‌نامند و آن را با حرف g نشان می‌دهند.

مقدار واقعی g ، در نقطه‌های مختلف زمین فرق می‌کند و، در هر حال، عددی گنگ است. در اینجا، مقدار تقریبی g که مربوط به سطح دریا در عرض ۴۵ تا ۵۰ درجه جغرافیایی است، داده شده است:

$$\begin{aligned} g &= 9/81; & g^2 &= 96/236; \\ \frac{1}{g} &= 0/1019; & \sqrt{g} &= 3/1321; \\ \pi\sqrt{g} &= 9/8398; & \pi\sqrt{2g} &= 13/9155 \end{aligned}$$

هر چه در ریاضیات جلوتر بروید، با عددهای گنگ بیشتری سروکار پیدا می‌کنید.

۳۶. پیدا کردن پاره‌خط‌های راست،

با طولی برابر عدد $\sqrt{n}$

هر عدد دلخواه گنگ را نمی‌توان، به کمک خط‌کش و پرگار، روی یک پاره‌خط راست نشان داد. مثلاً π ، یکی از این عددهاست. پیدا کردن پاره‌خط راستی به طول برابر π ، از همان دوران یونان باستان مطرح بوده است و بسیاری از ریاضی‌دانان تلاش کرده‌اند، این مساله را، به کمک خط‌کش و پرگار حل کنند تا این‌که، سرانجام، در سده‌های اخیر ثابت شد، چنین رسمی ممکن نیست. البته، اگر خود را به خط‌کش و پرگار محدود نکنیم، می‌توان راه‌حل‌هایی برای این مساله پیدا کرد.

یا مقوا، استوانه‌ای بسازید که قطر قاعده آن برابر واحد باشد. ارتفاع استوانه را به دلخواه خود، و مثلاً برابر ۲ بگیرید. اکنون، اگر سطح جانبی استوانه را، رنگی کنید و تا رنگ آن خشک نشده، درست یک دور کامل، روی صفحه سفید کاغذ بغلطانید. اثر رنگ، مستطیلی را روی کاغذ سفید

ایجاد می‌کند که، یک بُعد آن، برابر ۲ (همان ارتفاع استوانه) و بُعد دیگرش، برابر π است، زیرا این بُعد، برابر با محیط قاعده استوانه، یعنی π است. ولی، اگر n عددی طبیعی باشد، $\sqrt{n}$ را به کمک خط‌کش و پرگار، می‌توان ساخت.

دیدیم، $\sqrt{2}$ برابر است با طول قطر مربع به ضلع ۱. اکنون، اگر مستطیلی به طول برابر $\sqrt{2}$ و عرض برابر ۱ رسم کنیم، طول قطر آن، برابر $\sqrt{3}$ می‌شود (بگویید چرا؟).

طول قطر مستطیلی با بُدهای برابر $\sqrt{3}$ و ۱، برابر $\sqrt{4}$ ، یعنی ۲ می‌شود.

مستطیل با بُدهای ۲ و ۱، قطری به اندازه $\sqrt{5}$ و مستطیل با بُدهای $\sqrt{5}$ و ۱، قطری به اندازه $\sqrt{6}$ دارد و غیره.

اکنون روشن است، برای ساختن عدد گنگی مثل $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ ، کافی است، پاره‌خط راست به طول $\sqrt{2}$ را از پاره‌خط راست به طول $\sqrt{5}$ جدا کنیم، بقیه پاره‌خط راست برابر $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ خواهد بود.

یادداشت ۱. مجموعه عددهای حقیقی، نسبت به عمل‌های جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و توان، مجموعه‌ای بسته است، ولی نسبت به عمل ریشه گرفتن، بسته نیست. به این ترتیب، مجموع، تفاضل، حاصل ضرب، خارج قسمت دو عدد حقیقی، بازهم عددی حقیقی است. همچنین با به توان رساندن یک عدد حقیقی، در نتیجه عمل، عددی حقیقی به دست می‌آید. ولی در ریشه عددهای حقیقی، وضع فرق می‌کند. مثلاً $2 -$ عددی حقیقی است، در حالی که $\sqrt{-2}$ ، عددی حقیقی نیست، یعنی نمی‌توان عددی حقیقی پیدا کرد که ضمن ضرب در خودش، برابر -2 شود.

یادداشت ۲. مجموعه عددهای حقیقی، محور عددی را پر می‌کنند، یعنی، اگر روی یک خط راست، نقطه‌ای را به عنوان مبدا (نماینده عدد صفر) و پاره‌خط راستی را به عنوان واحد و جهتی را برای عددهای مثبت (و در نتیجه،

جهت عکس آن را برای عددهای منفی) انتخاب کنیم، آنوقت، مجموعه نقطه‌های این محور عددی، با مجموعه عددهای حقیقی، در تناظر یک‌به‌یک خواهند بود، یعنی هر نقطه واقع بر محور عددی، نماینده یک (وتنها یک) عدد حقیقی است و، برعکس، هر عدد حقیقی، متناظر با یک نقطه (وتنها یک نقطه) از محور عددی است.

مجموعه عددهای حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهند.

* یادداشت ۳. عددهای گنگ هم، به نوبه خود، به دو گروه تقسیم

می‌شوند: عددهای جبری و عددهای غیرجبری.

عددهای جبری، آنهایی هستند که می‌توانند ریشه معادله‌ای با ضریب‌های درست باشند، مثلاً $\sqrt{2}$ عددی جبری است، زیرا یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 2 = 0$ است. همچنین $2 + \sqrt{3}$ ، عددی جبری است، زیرا در معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ صدق می‌کند. روشن است که، با این تعریف، همه عددهای گویا، عددهای جبری هستند.

عدد غیر جبری، عددی است که نتواند ریشه معادله‌ای با ضریب‌های درست باشد. مثلاً، عددهای π ، e ، $\frac{1}{\pi}$ و $\sqrt{g}$ ، عددهای غیر جبری‌اند. باتوجه به این یادداشت، می‌توان مجموعه عددهای حقیقی را، اجتماع دو مجموعه دانست. مجموعه عددهای جبری و مجموعه عددهای غیرجبری.

۴۴. قدرمطلق

خسرو ۵۰۰ ریال موجودی و جواد ۵۰۰ ریال قرض دارد. در این‌جا، هم برای خسرو و هم برای جواد، از عدد ۵۰۰ استفاده کرده‌ایم، درحالی که اولی با دومی فرق دارد. درواقع، خسرو ۵۰۰+ ریال و جواد ۵۰۰- ریال دارد. وقتی تنها خود عدد را به‌کار ببریم و به علامت آن (یعنی مثبت یا منفی بودن آن) توجهی نداشته باشیم، گوییم با قدرمطلق عدد سروکار داریم. برای نشان دادن قدرمطلق، دو پاره‌خط راست کوتاه و موازی در دو طرف عدد قرار

$$|+500| = 500 \text{ و } |-500| = 500$$

به‌زبان ساده‌تر، می‌توان گفت: منظور از قدرمطلق یک عدد، مقدار عددی آن، با علامت مثبت است، چراکه می‌دانیم 500 ، یعنی $+500$.

مثال ۱. قدرمطلق عددهای $2 - \sqrt{3}$ و $1 - \sqrt{3}$ چقدر است؟
حل. ۲ از $\sqrt{3}$ بزرگتر و بنابراین $2 - \sqrt{3}$ عددی مثبت است، پس

$$|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$$

ولی ۱ از $\sqrt{3}$ کوچکتر و $1 - \sqrt{3}$ منفی است و می‌توان آن را به‌صورت

$$-(\sqrt{3} - 1)$$

نوشت، بنابراین

$$|1 - \sqrt{3}| = |-(\sqrt{3} - 1)| = \sqrt{3} - 1$$

مثال ۲. قدرمطلق عدد حقیقی a چقدر است؟

حل. در مثال ۱ دیدیم، اگر عددی مثبت باشد، قدرمطلق آن با خودش برابر می‌شود. ولی اگر عددی منفی باشد، قدرمطلق آن، برابر با قرینه آن عدد می‌شود:

$$\text{اگر } a > 0, \text{ آن وقت } |a| = a;$$

$$\text{اگر } a < 0, \text{ آن وقت } |a| = -a.$$

روشن‌است، اگر $a = 0$ ، آن وقت می‌توان $|a|$ را برابر a یا $-a$ نوشت (زیرا 0 با -0 فرقی ندارد)، ولی معمول شده‌است که در حالت صفر بودن a هم، قدرمطلق a را برابر a می‌نویسند.

تمامی حل را می‌توان بایک برابری نشان داد.

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

یادداشت مهم. مواظب باشد، در جبر مقدماتی، $\sqrt{4}$ با جذر ۴ فرق دارد: جذر عدد ۴، می‌تواند +۲ باشد یا -۲؛ ولی $\sqrt{4}$ همیشه برابر است با ۲، یعنی قدرمطلق +۲ و -۲. به این ترتیب، همیشه باید نوشت:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

مثال ۳. حاصل $\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2}$ را پیدا کنید.
حل. داریم:

$$\sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} = |3 - \sqrt{10}|$$

$3 - \sqrt{10}$ ، عددی منفی است (۳ از $\sqrt{10}$ کوچکتر است)، پس

$$|3 - \sqrt{10}| = |-(\sqrt{10} - 3)| = \sqrt{10} - 3$$

تمرین‌ها

۱۶۹. از مجموعه‌های N (عددهای طبیعی)، Z (عددهای درست)، Q (عددهای گویا) و R (عددهای حقیقی)، کدام، زیرمجموعه کدام است؟
۱۷۰. از این عددها کدام گویا و کدام گنگ است؟

$$۱) \sqrt{3} - ۱; \quad ۲) \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad ۳) \frac{1}{5}\pi;$$

$$۴) \sqrt{9} - \sqrt{4}; \quad ۵) \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{24}}{\sqrt{3}};$$

$$۶) ۳/۱۴; \quad ۷) \frac{1}{\pi}\sqrt{\pi}$$

۱۷۱. ده عدد گویا پیدا کنید که از $\frac{3}{14}$ بزرگتر از π کوچکتر باشند.

۱۷۲. یک عدد گنگ پیدا کنید که بین $\frac{1}{414}$ و $\sqrt{2}$ باشد.

۱۷۳. به این پرسش‌ها، پاسخ دهید:

(۱) از دو کسر متعارفی که مخارج‌های برابر دارند، کدام بزرگتر است؟

(۲) از دو کسر با صورت‌های برابر، کدام بزرگتر است؟

(۳) از دو عدد مثبت، کدام بزرگتر است؟

(۴) از دو عدد منفی، کدام بزرگتر است؟

۱۷۴. a عددی است حقیقی. a بزرگتر است یا $|a|$ ؟

۱۷۵. $|a| + |b|$ بزرگتر است یا $|a + b|$ ؟

۱۷۶. $|a| - |b|$ بزرگتر است یا $|a - b|$ ؟

۱۷۷. آیا این برابری‌ها درست‌اند؟ چرا؟

$$۱) |x| \cdot |y| = |x \cdot y|; \quad ۲) \frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$$

۱۷۸. حاصل این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$۱) |-3| + |5| - |-1|;$$

$$۲) |9 - \sqrt{82}| + |10 - \sqrt{82}|;$$

$$۳) |2\sqrt{6} - 5| - |6 - \sqrt{24}|$$

۱۷۹. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که ضلع‌های پهلوی زاویه قائمه

در آن، عددهایی گویا و وتر آن، برابر باشد با

$$۱) \sqrt{5}; \quad ۲) \sqrt{13}; \quad ۳) \sqrt{17};$$

$$۴) 2\sqrt{10}; \quad ۵) 2\sqrt{5}; \quad ۶) \sqrt{157}$$

* ۱۸۰. چرا این عددهای گنگ، عددهای جبری‌اند؟

$$۱) \sqrt{7}; \quad ۲) \frac{\sqrt{5}}{2}; \quad ۳) 2\sqrt{3};$$

$$۴) \sqrt{3} - 1; \quad ۵) \sqrt{7} + 2$$

* ۱۸۱. ثابت کنید، اگر طول ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه، عددهایی درست باشند (مثلث فیثاغوری)، از این عددها، همیشه، دست‌کم یکی بر ۲، دیگری بر ۳ و سومی بر ۵ بخش‌پذیر است.

۱۸۲. حاصل هریک از این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$۱) \frac{x}{|x|}; \quad ۲) \frac{|x|}{x}; \quad ۳) x - |x|;$$

$$۴) |x| + |x - ۵|$$

۱۸۳. x را پیدا کنید، به شرطی که داشته باشیم:

$$۱) x - |x| = -۲; \quad ۲) |x - ۱| = ۴;$$

$$۳) |۲x + ۳| - ۱ = ۰; \quad ۴) \frac{x}{|x - ۳|} = ۱$$

۷. جمله و چند جمله‌ای

۱۶. ورود به مطلب

به این ۳ مساله توجه کنید:

مساله ۱. ۱۲ سیب را بین دونفر طوری تقسیم کنید که، یکی از آن‌ها، دوبرابر دیگری داشته باشد.

مساله ۲. عدد ۱۲ را به نسبت ۱ : ۲ تقسیم کنید.

مساله ۳. عدد a را به نسبت $m : n$ تقسیم کنید.

در مساله اول صحبت برسر میوه سیب است، درحالی‌که در مساله دوم، به هیچ چیز مشخصی توجه ندارد. دو مساله، یکی است، ولی اولی یک مساله مشخص است که، درعمل و زندگی، با آن روبه‌رو می‌شویم، ولی مساله دوم، کلی‌تر است و، به‌جای سیب، فقط از عدد صحبت کرده‌است.

فرق «۱۲ سیب» با «۱۲» در این است که، اولی تنها به «سیب» مربوط می‌شود، درحالی‌که «عدد ۱۲» را می‌توان برای هر چیزی به‌کار برد.

این جدایی از «سیب» و «پول» و «مداد» و غیره را، در ریاضیات، «انتزاع» گویند. وقتی مساله‌ای را که درباره «سیب‌ها» است، حل می‌کنیم، یک مساله مربوط به چیزی خاص (یعنی سیب) است، ولی وقتی مساله را درباره عدد ۱۲ حل می‌کنیم، دیگر به چیز خاصی وابسته نیست: ۱۲ می‌تواند، ۱۲ سیب باشد یا ۱۲ دفترچه یا ۱۲ گوسفند. و «انتزاع»، یعنی جدا شدن از چیزهای مشخص.

در طول زندگی نسل‌های انسان‌های نخستین، هزاران سال گذشت، تا ضمن تجربه دریافتند، در ۱۲ است و ۱۲ مرد و ۱۲ درخت، چیز مشترکی وجود دارد که همان «عدد ۱۲» است. پیدایش عددها، بدون وابستگی آن‌ها به چیزی یا موجودی، نخستین «انتزاع» در ریاضیات بود.

در مسأله ۳، «انتزاع» در مرحله بالاتری انجام شده است. به جای «عدد ۱۲»، «عدد a » و به جای نسبت ۱ : ۲، نسبت $n : m$ آمده است. مساله، بازهم کلی تر شده است. یعنی اگر مسأله ۳ را حل کنیم، آن وقت هر مسأله دیگری را، که به جای a و m و n ، عدد گذاشته باشند، می توانیم حل کنیم. اگر بخش های عدد a را x و y بنامیم، جواب مسأله ۳، چنین است:

$$x = \frac{ma}{m+n} \text{ و } y = \frac{na}{m+n} \quad (۱)$$

برابری های (۱)، دستورها یا فرمول هایی هستند که، به کمک آنها، می توان مثلاً، جواب مسأله ۲ را نوشت. در مسأله ۲، داریم $a = ۱۲$ ، $m = ۲$ و $n = ۱$ ؛ پس

$$x = \frac{۲ \times ۱۲}{۲ + ۱} = ۸ \text{ و } y = \frac{۱ \times ۱۲}{۲ + ۱} = ۴$$

درواقع، در مرحله دوم «انتزاع»، به جای عددهای مشخص، با «حرف ها» (a و m و n و x و y) سروکار داشتیم. و این، یعنی، تبدیل «حساب» به «جبر».



واژه «جبر» از نام کتاب خوارزمی به نام «الجبر والمقابلہ» گرفته شده است. خوارزمی که در زمان مأمون خلیفه عباسی می زیست، نخستین کسی است که کتاب مستقلی درباره «جبر» نوشت. این ریاضی دان و اخترشناس ایرانی، کتاب خود را به این قصد نوشت که راه حل معادله های درجه اول و درجه دوم را نشان دهد.

درواقع «جبر مقدماتی» یا «جبر دبیرستانی»، در اساس به معنی حل معادله هاست و همه بحث های جانبی دیگر آن، به منظور آماده کردن زمینه های لازم، برای حل معادله است.

خود نام کتاب خوارزمی، یعنی «جبر و مقابله»، گواهی بر همین مطلب است. او، «جبر» را به معنای «جبران کردن» می‌گرفت و، به زبان ریاضیات امروزی، به مفهوم انتقال جمله منفی از یک طرف برابری، به طرف دیگر است، یعنی عملی که موجب مثبت شدن علامت جمله می‌شود. خوارزمی، «مقابله» (مقابل هم قرار دادن) را به معنای حذف جمله‌های برابر، در دو طرف معادله می‌دانست.

البته، خوارزمی و ریاضی‌دانان ایرانی بعد از او (که دانش جبر را تکامل دادند)، مثل کرجی، خیام و جمشید کاشانی، از «حرف» و «علامت» برای نوشتن دستورها و فرمول‌ها استفاده نمی‌کردند و همه چیز را، با بیان و گفتار و بدون هیچ نمادی، توضیح می‌دادند. مثلاً، نماد برابری، یعنی «=»، در سده شانزدهم میلادی و به وسیله روبرت رکورد، ریاضی‌دان و پزشک انگلیسی (۱۵۱۰-۱۵۵۸) وارد ریاضیات شد. با وجود این، مدتی طول کشید تا این نماد عمومی شد. مثلاً رنه دکارت، ریاضی‌دان و فیلسوف بزرگ فرانسوی (۱۵۹۶-۱۶۵۰ میلادی) که نزدیک به یک سده، بعد از «رکورد» می‌زیست، برای برابری، از نماد «=» استفاده می‌کرد (در کتاب معروف خود، به نام «هندسه»). خود «رکورد»، دلیل انتخاب این نماد را برای برابری، این‌طور توضیح می‌دهد: «هیچ دو چیزی، نمی‌توانند بهتر از دو باره خط راست، با هم برابر باشند».

نمادهای ساده‌ای که برای جمع «+» یا تفریق «-» به کار می‌بریم، برای نخستین بار، در سال ۱۴۸۲ میلادی، در کتاب «حساب» اولبریخت واگنر و، سپس، در کتاب «رساله‌ای درباره حساب»، اثر یوهان ویدمان به کار برده شد (این دو ریاضی‌دان، آلمانی بودند و کتاب‌های آن‌ها در لایپزیک چاپ شد). به کار بردن «حرف‌های الفبای لاتینی»، برای مجهول و هم ضریب‌های عددی، برای نخستین بار به وسیله فرانسواویت (۱۵۴۰-۱۶۰۳ میلادی) معمول شد و دکارت هم، که پس از او می‌زیست، همین روش را پذیرفت

و حرف‌های نخست الفبا، یعنی a ، b ، c ، ... را برای مقدارهای معلوم و حرف‌های آخر الفبا، یعنی x و y و z ، ...، را برای مقدارهای مجهول به‌کاربرد. بنابراین، مفهوم‌هایی از «جبر»، مثل «جمله»، «ضریب»، «چندجمله‌ای» و غیرآن، در نوشته‌های ریاضی‌دانان ایرانی وجود ندارد. با وجود این، خوارزمی، گونه‌های مختلف معادله درجه دوم را، با همان روش امروزی (ولی با بیان و توضیح و نه با فرمول) حل می‌کرد. البته، خوارزمی، برای ضریب‌ها، از عددهای درست و مثبت استفاده می‌کرد و به ریشه منفی معادله هم، توجهی نداشت. در کتاب خوارزمی، برای حل معادله‌ها، به‌جز روش جبری، اغلب از روش‌های هندسی هم استفاده شده‌است. خیام، به‌جز معادله‌های درجه دوم، به گونه‌های مختلف معادله درجه سوم هم پرداخته است، ولی بیشتر به یاری هندسه، جواب را (و البته، جواب مثبت را) به‌دست آورده است.

۲۶. جمله

$2x^2$ ، $-3y$ ، $4xy^2$ و ax^n (n ، عددی درست و مثبت یا صفر)، هرکدام، یک جمله را معرفی می‌کنند و، به‌همین مناسبت، در جبر، به آن‌ها یک جمله‌ای یا جمله گویند.

در ax^n ، اگر n عددی منفی یا کسری باشد، آن وقت به‌طور معمول، به آن جمله نمی‌گویند. به این ترتیب، $\frac{1}{x}$ ، $\frac{4x}{y}$ ، $\sqrt{x}$ و $\frac{1}{x}yz$ ، جمله نیستند.

بنابراین، جمله، یعنی عبارتی که، در آن، برای حرف‌ها، تنها نماد ضرب و توان طبیعی وجود داشته‌باشد. به این معنا، x و 5 و $\frac{3}{4}a^2$ ، جمله یا یک جمله‌ای هستند، زیرا، برای حرف‌ها، عمل جمع، تفریق، تقسیم و غیره وجود ندارد.

در ax^n ($n \in N$ یا $n = 0$)، a را ضریب عددی و n را درجه جمله گویند. ضریب عددی، می‌تواند هر عدد حقیقی (درست، کسری یا گنگ)

باشد. به همین مناسبت $\frac{3}{5}a^2 - x\sqrt{5}$ یا $\frac{ab^2}{\sqrt{3}}$ ، یک جمله‌ای هستند.

یادداشت. گاهی، یک جمله‌ای را تنها با این شرط تعریف می‌کنند که، در آن، عمل جمع و تفریق وجود نداشته باشد. مثلاً $\frac{3}{a}$ ، $\sqrt{2}x$ ، $\frac{3}{x}y$ را هم، یک جمله‌ای می‌دانند؛ ولی منطقی‌تر این است که، ولو با قبول این تعریف بگوییم: $\frac{3}{x}$ و $\frac{2}{x}y$ ، نسبت به x ، جمله‌ای کسری، $\sqrt{2}x$ نسبت به x ،

جمله‌ای گنگ و $\frac{y}{\sqrt{x}}$ نسبت به x ، کسری و گنگ است. در این کتاب، اغلب، این گونه عبارت‌ها را، یک جمله‌ای نمی‌نامیم. به این نکته هم توجه کنیم: $\frac{5}{a}x^2$ نسبت به x ، یک جمله‌ای، ولی نسبت به a ، کسری است.

اگر مجهول (یا متغیر) را x بدانیم و a ، نماینده عدد ثابتی باشد، $\frac{5}{a}x^2$ ، یک جمله‌ای است که، در آن، $\frac{5}{a}$ ضریب عددی جمله و ۴ درجه جمله است.

جمله‌ای که شامل چند متغیر است. دیدیم که، مثلاً ax^ny^m هم m و n عددهایی طبیعی یا صفر و a عددی حقیقی)، یک جمله‌ای است. در این جمله، a ضریب عددی و x و y ، متغیرهای جمله‌اند؛ مگر این که، به دلیلی، تاکید شده باشد، تنها نسبت به متغیر y . در این صورت (یعنی وقتی که x متغیر نباشد)، ax^n ضریب عددی و m درجه جمله (نسبت به متغیر y) می‌شود. در همین جمله، اگر متغیر را x بدانیم، آن وقت، نسبت به متغیر x ، ay^m ضریب عددی و n درجه جمله است.

ولی اگر هر دو مجهول x و y را متغیر بدانیم، آن وقت، a ضریب عددی جمله و $m + n$ درجه آن است:

برای پیدا کردن درجه یک جمله‌ای، باید نماهای متغیرها را با هم جمع کرد جمله $2xy^2$ ، نسبت به متغیرهای x و y ، از درجه ۳ و جمله $\frac{\sqrt{5}}{4}a^2b^2c$ ، نسبت به متغیرهای a و b و c ، از درجه ۶ است.

توجه کنید: جمله $5x^3y^4z^7$ ، نسبت به x ، از درجه سوم؛ نسبت به y ، از درجه چهارم؛ نسبت به z ، از درجه هفتم؛ نسبت به x و y ، از درجه هفتم؛ نسبت به x و z ، از درجه دهم؛ نسبت به y و z از درجه یازدهم و، سرانجام، نسبت به x و y و z از درجه چهاردهم است.

جمله‌های متشابه. دو جمله، اگر تنها در ضریب عددی خود، اختلاف داشته باشند، متشابه نامیده می‌شوند.

$3x$ و $\frac{1}{4}x$ و $x\sqrt{5}$ ، سه جمله متشابه‌اند. همچنین x^2 با $\frac{3}{5}x^2$ ؛ $2xy$ با $7xy$ و $4a^2b$ با $\frac{3}{5}a^2b$ متشابه‌اند.

دو جمله $4a^2b$ و $5a^2b^2$ ، نسبت به دو متغیر a و b ، متشابه نیستند؛ ولی نسبت به متغیر a متشابه‌اند (که دراین صورت، ضریب عددی اولی برابر $4b$ و ضریب عددی دومی برابر $5b^2$ می‌شود).

برای جمع و تفریق (یا به‌زبان دیگر، برای جمع جبری) دو یا چند جمله متشابه، باید ضریب‌های عددی را باهم جمع یا از هم کم کرد و نتیجه را، ضریب متغیر قرار داد:

$$3a + 4a = (3 + 4)a = 7a;$$

$$\frac{2}{5}x^2 + x^2 = \left(\frac{2}{5} + 1\right)x^2 = \frac{7}{5}x^2;$$

$$x^2y - ax^2y + 3ax^2y = (1 - a + 3a)x^2y = (2a + 1)x^2y;$$

$$at^2 + bt^2 - ct^2 = (a + b - c)t^2$$

ضرب و تقسیم یک جمله‌ای‌ها. برای انجام عمل ضرب یا تقسیم، در یک جمله‌ای‌ها، ضریب‌های عددی را درهم و متغیرهای هم‌نام را در یکدیگر ضرب و یا برهم تقسیم می‌کنیم:

$$(2x^2) \times (3x) = (2 \times 3) \cdot (x^2 \cdot x) = 6x^3;$$

$$\frac{2x^2}{3x} = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x}\right) = \frac{2}{3}x;$$

$$(15x^2y) \times (3xy^2) = (15 \times 3) \cdot (x^2 \cdot x) \cdot (y \cdot y^2) = 45x^3y^3;$$

$$\frac{15x^2y}{3xy^2} = \left(\frac{15}{3}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x}\right) \cdot \left(\frac{y}{y^2}\right) = \frac{5x}{y};$$

$$(2xz^3) \times (2x^3) = (2 \times 2) \cdot (x \cdot x^3) \cdot z^3 = 4x^4z^3;$$

$$\frac{2xz^3}{2x^3} = \left(\frac{2}{2}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^3}\right) \cdot z^3 = \frac{z^3}{x^2}$$

چندجمله‌ای. خود نام چندجمله‌ای، معنای آن را روشن می‌کند:

$a + b$ یا $2a - c$ یا $5x^2 + 3y$ دو جمله‌ای هستند؛

$a + b - c$ یا $1 - 2x - x^2$ یا $xy + x - y$ سه جمله‌ای‌اند و

چندجمله‌ای بایک متغیر و از درجه سوم است. $x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ یک چهارجمله‌ای است. این عبارت درضمن، یک

وقتی چندجمله‌ای دارای یک متغیر باشد، بزرگترین درجه، در بین

جمله‌ها، درجه چندجمله‌ای نامیده می‌شود. عبارت

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + lx + m$$

یک چندجمله‌ای از درجه n است.

درجه جمله ۵ برابر صفر است، زیرا می‌توان آن را به صورت $5x^0$ نوشت

$$; (x^0 = 1)$$

دوجمله‌ای $1 - x^2$ از درجه دوم است؛

چندجمله‌ای $1 - x^2 + 3x - 2x^5$ ، از درجه پنجم است؛

جمله $3x^2y^3$ ، نسبت به x از درجه دوم، نسبت به y از درجه سوم و

نسبت به x و y ، از درجه پنجم است ($2 + 3 = 5$)؛

چندجمله‌ای $x^2 + y^2 - x^2y + 1$ ، نسبت به x از درجه دوم، نسبت به y از درجه دوم و، نسبت به x و y ، از درجه سوم است. درجه یک جمله، نسبت به چند متغیر، برابر است با مجموع نماهای همه متغیرهای آن.

وقتی چندجمله‌ای شامل یک متغیر باشد، به یکی از دو صورت، می‌توان آن را منظم کرد. مثلاً چندجمله‌ای

$$x^2 - 3x + x^5 - 7x^2 + 12 - x^2$$

را می‌توان به صورت

$$x^5 - x^2 - 7x^2 + x^2 - 3x + 12 \quad (1)$$

و یا به صورت

$$12 - 3x + x^2 - 7x^2 - x^2 + x^5 \quad (2)$$

نوشت. در حالت (۱)، چندجمله‌ای برحسب توان‌های نزولی x و در حالت (۲)، برحسب توان‌های صعودی x منظم شده‌است. همیشه بهتر است، چندجمله‌ای را برحسب توان‌های نزولی x منظم کنیم که، در این صورت، آن را شکل متعارف چندجمله‌ای گویند.

مثال. چندجمله‌ای

$$x^5 + y - x^2y^2 + x^2 - 1 + x^2 - 3xy$$

را برحسب توان‌های نزولی متغیر x منظم کنید.

پاسخ.

$$x^5 + x^2 - y^2x^2 + x^2 - 3yx + y - 1$$

وقتی، چندجمله‌ای را برحسب توان‌های نزولی (یا صعودی) یک متغیر منظم می‌کنیم، بهتر است، در هر جمله، متغیر یا متغیرهای دیگر را به صورت ضریب این متغیر بنویسیم. وقتی نسبت به متغیر x منظم می‌کنیم، باید نوشت: $-yx^2$ و نه $-x^2y$.

تمرین‌ها

۱۸۴. در این چندجمله‌ای‌ها، x متغیر و a و b و c ، عددهای ثابت‌اند؛ آن‌ها را ساده و برحسب توان‌های نزولی x منظم کنید:

$$\begin{array}{ll} ۱) 3x - 4x + 1; & ۲) x^2 + 1 - 4x^2 + 2x; \\ ۳) (x^2 + 1) + (3x^2 - x) - (5x + 1); \end{array}$$

۱۸۵. هریک از این دو عبارت را ساده کنید:

$$\begin{array}{l} ۱) -2n - \{-5n - [-8n - (5 - 3n)]\}; \\ ۲) 4a^2b - \{ab^2 - [-5a^2b - (2ab^2 - 1) - (1 - 3ab^2)]\} \end{array}$$

۱۸۶. در عبارت $a(x^2 - 1) + 1 - x^2$ ، دو جمله آخر را طوری داخل یک پرانتز قرار دهید که، مقدار داخل پرانتز، با پرانتزی که در عبارت وجود دارد، برابر شود.

۱۸۷. می‌دانیم $A = a^2 + 3ab + b^2$ و $B = a^2 + 6ab - b^2$ حاصل این عبارت را، برحسب توان‌های نزولی a ، منظم کنید:

$$F = A - [B - 2A - (A - B)]$$

۱۸۸. ثابت کنید، مجموع دو عدد فرد پشت سرهم، بر ۴ بخش‌پذیر است.

۱۸۹. جای دو رقم یک عدد دورقمی را عوض و، سپس، با عدد اصلی جمع کرده‌ایم. ثابت کنید، این مجموع بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۱۹۰. چه عددی را از a کم کنیم تا تفاضل، برابر قرینه عدد a شود؟

۱۹۱. قرینه عدد -۲ را با عکس عدد $-\frac{1}{۴}$ جمع کرده‌ایم. مجموع

چقدر است؟

۱۹۲. عدد $-(a+b)$ ، به‌ازای چه مقدارهایی از a و b ، عددی مثبت

می‌شود؟ به‌ازای چه مقدارهایی از a و b ، برابر صفر است؟

۱۹۳. مقدار هریک از این عبارت‌های جبری را، به‌ازای $x = -۲$ و

$y = ۵$ پیدا کنید:

$$۱) (x^۲ - y^۲) : x - y; \quad ۲) x^۲ - y^۲ : x - y;$$

$$۳) x^۲ - y^۲ : (x - y); \quad ۴) (x^۲ - y^۲) : (x - y)$$

۱۹۴. حاصل هریک از این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$۱) \frac{\frac{۳}{۴} + ab - b^۲}{5a^۲ - ab} \quad \text{به‌ازای } a = -\frac{1}{۴} \text{ و } b = -۱$$

$$۲) \frac{a^۲ - ab + \frac{1}{۳}}{8a^۲b^۲} \quad \text{به‌ازای } a = -۰٫۵ \text{ و } b = \frac{۲}{۳}$$

$$۳) \frac{۳m^۲n + \frac{۳}{m} - n}{۲m - m : n} \quad \text{به‌ازای } m = -\frac{۲}{۳} \text{ و } n = -۲$$

$$۴) \frac{۳(x-y)^۲ + ۳(x-y^۲)}{xy^۲ - (xy)^۲} \quad \text{به‌ازای } x = -۰٫۵ \text{ و } y = -\frac{۲}{۳}$$

$$۵) \frac{x^۲ - y^۲ - ۲xy}{(۲xy - y)^۲ - ۲(x-y)} \quad \text{به‌ازای } x = -۵ \text{ و } y = -۷$$

$$۶) \frac{a^۲}{a+۱} + \frac{a^۲}{a-۱} + \frac{1}{a+۱} - \frac{1}{a-۱} \quad \text{به‌ازای } a = -۱٫۵$$

۱۹۵. حاصل را به‌دست آورید:

$$۱) -(۱۲a^۲ + c) + (۴a^۲ + ۲b - ۲x^۲y^۲) + (۷b + ۲x^۲y^۲);$$

$$۲) (\Delta ax^2y^5) \cdot (-3a^2x^2z);$$

$$۳) ۱۲x^2y^2z^5 : 4x^2yz^2;$$

$$۴) \frac{4x^2y^2}{2x^2y};$$

$$۵) ۱۰x^2y^5 : 2x^6y^2$$

$$۶) (-3a^2b^2c) \cdot (7ab^2c^2);$$

$$۷) (24x^2yz^2) : (-3xyz^2)$$

$$۸) a^2b(ab^2)^2;$$

$$۹) 3xy(2x^2y)^2$$

۱۹۶. اگر بدانیم $x^2 \cdot (x^2)^a \cdot x^a = x^{17}$ مقدار a را پیدا کنید.

۱۹۷. در جمله $13x^2y^2z$ (۱ ضرب عددی، ۲ ضرب x^2y^2z ؛

۳ ضرب y^2z ، ۴ ضرب x^2 ؛ ۵ ضرب z ، ۶ ضرب y^2 چیست؟

* ۱۹۸. عددی سه رقمی را در اختیار داریم. ابتدا رقم‌ها را به ردیف عکس

نوشته و عدد سه رقمی حاصل را از عدد اصلی کم کرده‌ایم. سپس، رقم‌های

تفاضل را در جهت عکس نوشته و عدد حاصل را با خود تفاضل، جمع

کرده‌ایم. مجموع اخیر، چه عددی است؟

* ۱۹۹. چهار رقم برگزیده‌ایم و، با آنها، بزرگترین و کوچکترین عدد

چهاررقمی را ساخته‌ایم. مجموع این دو عدد چهاررقمی، برابر ۱۱۲۲۰

شده‌است. مجموع چهار رقم نخستین را پیدا کنید.

* ۲۰۰. همهٔ عددهای سه رقمی را پیدا کنید که، برای هر کدام، هر رقم،

عدد اول و، در ضمن؛ بخش‌یابی از خود عدد باشد.

* ۲۰۱. کدام عدد سه رقمی را در سمت راست عدد ۵۷۹ بنویسیم، تا

عدد شش رقمی حاصل، بر ۵ و ۷ و ۹ بخش‌پذیر باشد؟

* ۲۰۲. همهٔ کسرهای ساده‌نشده به مخرج p را در نظر می‌گیریم که

بین دو عدد طبیعی a و b ($a < b$) قرار دارند. اگر p ، عددی اول باشد،
مجموع همه این کسرها را پیدا کنید.

*۲۰۳. کدام رقم‌های x و y در این برابری صدق می‌کنند:

$$\overline{xyy} = (\overline{xx})^2 + (\overline{yy})^2$$

۸. ضرب و تقسیم در چندجمله‌ای‌ها

۱۸. ضرب چندجمله‌ای در یک جمله‌ای و تقسیم چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای.

(۱) برای ضرب یک جمله‌ای در چندجمله‌ای، باید این جمله را در هریک از جمله‌های چندجمله‌ای ضرب و حاصل ضرب‌ها را باهم جمع کرد (منظور از جمع، جمع جبری است، یعنی با رعایت علامت‌ها). مثلاً

$$\begin{aligned} 5x^2y(x^2 + 2x^2y + 3y^2 - 2) = \\ 5x^5y + 10x^4y^2 + 15x^2y^3 - 10x^2y \end{aligned}$$

(۲) برای تقسیم چندجمله‌ای بر یک جمله‌ای، باید هریک از جمله‌های بخشی (مقسوم) را بر این جمله تقسیم و، خارج قسمت‌های حاصل را باهم جمع کرد. مثلاً

$$\begin{aligned} (7x^2y^2 - 3xy^2 + 5xy) : (7xy) = \\ = 2x^2y^2 : 7xy + (-3xy^2) : 7xy + 5xy : 7xy = \\ = \frac{2}{7}xy^2 - \frac{3}{7}y^2 + \frac{5}{7} \end{aligned}$$

روشن است، برای این که یک چندجمله‌ای، بر جمله مفروض، بخش پذیر باشد، باید هر جمله از چندجمله‌ای بر آن بخش پذیر باشد. در غیراین صورت، خارج قسمت، به جای یک چندجمله‌ای، یک کسر جبری می شود.

۲۶. ضرب و تقسیم دو چندجمله‌ای

(۱) برای ضرب چندجمله‌ای در چندجمله‌ای، باید هریک از جمله‌های یکی از چندجمله‌ای‌ها را در چندجمله‌ای دیگر ضرب و، سپس، حاصل ضرب‌ها را باهم جمع کرد. مثلاً

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3$$

که باتوجه به جمله‌های متشابه، سرانجام به دست می‌آید:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

(۲) تقسیم یک چندجمله‌ای، بر چندجمله‌ای دیگر، به معنای پیدا کردن چندجمله‌ای است که اگر آن را در بخش‌یاب (مقسوم‌علیه) ضرب کنیم، بخشی (مقسوم) به دست آید.

برای تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای، باید

(a) بخشی و بخش‌یاب را برحسب توان‌های نزولی مجهول، منظم کرد؛
 (b) نخستین جمله بخشی را بر نخستین جمله بخش‌یاب تقسیم کرد (این، نخستین جمله خارج قسمت است)؛
 (c) نخستین جمله خارج قسمت را در بخش‌یاب ضرب و، نتیجه ضرب را زیر بخشی نوشت؛

(d) نتیجه‌ای را که زیر بخشی نوشته‌ایم، از بخشی کم می‌کنیم و تفاضل را، نخستین باقی‌مانده (یا باقی‌مانده اول) می‌نامیم. اگر این باقی‌مانده، برابر صفر شود، تقسیم تمام شده است. ولی اگر باقی‌مانده اول مخالف صفر و درجه‌ای بیشتر از درجه بخش‌یاب داشته باشد، آن وقت؛

(e) نخستین جمله باقی‌مانده اول را، بر نخستین جمله بخش‌یاب تقسیم می‌کنیم (تا جمله دوم خارج قسمت به دست آید)؛

ادامه کار، تکرار عمل‌هایی است که تا این‌جا، انجام دادیم. این عمل‌ها، باید تاجایی ادامه پیدا کند که یا باقی‌مانده‌ای برابر صفر به‌دست آید و یا، درجه باقی‌مانده، از درجه بخش‌یاب، کوچکتر شود. درحالت اول، چندجمله‌ای بخشی، بر چندجمله‌ای بخش‌یاب، بخش‌پذیر است؛ ولی درحالت دوم، بخشی بر بخش‌یاب بخش‌پذیر نیست و گویند، تقسیم همراه با باقی‌مانده است. در واقع، درحالت اخیر، دوباره با کسر جبری سروکار داریم.

اگر چندجمله‌ای‌ها، شامل دو یا چند متغیر باشند، آن‌وقت، باید یکی از متغیرها را، متغیر اصلی درنظر گرفت (و بهتر است، متغیری که از درجه بالاتری است) و بقیه را به‌عنوان ضریب به‌حساب آورد. تقسیم این‌گونه چندجمله‌ای‌ها (که ضریب‌های حرفی دارند) بر یکدیگر، طبق همان قاعده‌ای انجام می‌شود که در بالا آوردیم.

مثال ۱. نتیجه این دو تقسیم را پیدا کنید:

$$۱) (28a^7 + 6a^6 - 15a^5 + 11a^4 - 3a^3) : (7a^4 + 5a^3 - 3a^2)$$

$$۲) (27x^5 - 81x^4y + 75x^3y^2 - 20x^2y^3 - 8xy^4 + 8y^5) :$$

$$(3x^3 - 7x^2y + 5xy^2 - 2y^3)$$

حل. بخشی و بخش‌یاب، در تقسیم اول، برحسب توان‌های نزولی a ، و در تقسیم دوم، برحسب توان‌های نزولی x ، منظم شده‌اند. بقیه عمل‌ها را طبق قاعده، انجام می‌دهیم.

$$\begin{array}{r|l} ۱) 28a^7 + 6a^6 - 15a^5 + 11a^4 - 3a^3 & 7a^4 + 5a^3 - 3a^2 \\ \mp 28a^7 \mp 20a^6 \pm 12a^5 & 4a^3 - 2a^2 + a \\ \hline & -14a^6 - 3a^5 + 11a^4 - 3a^3 \\ & \pm 14a^6 \pm 10a^5 \mp 6a^4 \\ \hline & 7a^5 + 5a^4 - 3a^3 \\ & \mp 7a^5 \mp 5a^4 \pm 3a^3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

این نتیجه را، به یکی از دو صورت زیر، می‌توان نوشت:

$$28a^5 + 6a^6 - 15a^5 + 11a^4 - 3a^2 =$$

$$= (7a^4 + 5a^2 - 3a^2)(4a^2 - 2a^2 + a);$$

$$\frac{28a^5 + 6a^6 - 15a^5 + 11a^4 - 3a^2}{7a^4 + 5a^2 - 3a^2} = 4a^2 - 2a^2 + a$$

$$\begin{array}{r} 27x^5 - 81x^4y + 75x^3y^2 - 20x^2y^3 - 8xy^4 + 8y^5 \\ \hline 9x^2 - 7x^2y + 5xy^2 - 2y^3 \\ \hline 27x^5 \pm 81x^4y \mp 75x^3y^2 \pm 18x^2y^3 \\ - 18x^4y + 20x^3y^2 - 2x^2y^3 - 8xy^4 + 8y^5 \\ \hline \pm 18x^4y \mp 22x^3y^2 \pm 20x^2y^3 \mp 12xy^4 \\ - 12x^3y^2 + 28x^2y^3 - 20xy^4 + 8y^5 \\ \hline \pm 12x^3y^2 \mp 28x^2y^3 \pm 20xy^4 \mp 8y^5 \end{array}$$

که به یکی از این دو صورت، نوشته می‌شود:

$$27x^5 - 81x^4y + 75x^3y^2 - 20x^2y^3 - 8xy^4 + 8y^5 =$$

$$= (3x^2 - 7x^2y + 5xy^2 - 2y^3)(9x^2 - 6xy - 4y^2);$$

$$\frac{27x^5 - 81x^4y + 75x^3y^2 - 20x^2y^3 - 8xy^4 + 8y^5}{3x^2 - 7x^2y + 5xy^2 - 2y^3} =$$

$$= 9x^2 - 6xy - 4y^2$$

مثال ۲. انجام عمل تقسیم در هریک از سه نمونه زیر، به چه نتیجه‌هایی

می‌رسد؟

$$۱) (x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz) : (x + y + z);$$

$$۲) (2x^2 + 3x^2 - 7x + 1) : (2x - 1);$$

$$۳) (x^2y^2 + z^2) : (xy - z)$$

حل. ۱) ابتدا باید بخشی و بخش‌یاب را برحسب توان‌های نزولی یکی

از متغیرها، و مثلاً x ، منظم کنیم:

$$\text{بخشی} = x^2 + 0x^2 - 3yzx + (y^2 + z^2);$$

$$\text{بخشیاب} = x + (y + z)$$

در بخشی، جمله x^2 . را، برای ردیف بودن توان‌های x و پیش‌گیری از اشتباه، اضافه کردیم. البته، وارد نکردن این جمله هم، مشکلی ایجاد نمی‌کرد. از تقسیم x^2 بر x ، نخستین جمله خارج قسمت، یعنی x^2 به دست می‌آید. از ضرب x^2 در دو جمله بخشیاب $(y + z)$ را، یک جمله به حساب می‌آوریم و، به همین جهت آن را داخل پرانتز نوشته‌ایم، نتیجه می‌شود:

$$x^2 + (y + z)x^2$$

که اگر آن را از بخشی کم کنیم، باقی‌مانده اول پیدا می‌شود:

$$-(y + z)x^2 - 3yzx + y^2 + z^2$$

از تقسیم $-(y + z)x^2$ بر x ، دومین جمله خارج قسمت، یعنی $-(y + z)x$ پیدا می‌شود و از ضرب آن در بخشیاب، به دست می‌آید.

$$-(y + z)x^2 - (y + z)(y + z)x$$

و یا

$$-(y + z)x^2 - (y^2 + z^2 + 2yz)x$$

آن را از باقی‌مانده اول کم می‌کنیم، تفاضل چنین است:

$$(y^2 + z^2 - yz)x + y^2 + z^2$$

از تقسیم نخستین جمله باقی‌مانده دوم بر x به دست می‌آید:

$$y^2 + z^2 - yz$$

که جمله سوم خارج قسمت است. آن را در بخش یاب ضرب می کنیم.

$$(y^2 + z^2 - yz)x + (y^2 + z^2 - yz)(y + z)$$

و یا اگر پرانتزهای آخر را در هم ضرب کنیم.

$$(y^2 + z^2 - yz)x + y^2 + z^2$$

جمله سوم خارج قسمت برابر $y^2 + z^2 - yz$ می شود که، اگر حاصل ضرب آن را در بخش یاب، از باقی مانده دوم کم کنیم، باقی مانده ای برابر صفر به دست می آید. بنابراین، تقسیم بدون باقی مانده است:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{x + y + z} = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz;$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

(۲) انجام عمل تقسیم دشوار نیست، ولی تقسیم، باقی مانده دارد.

باقی مانده تقسیم، برابر $-\frac{3}{2}$ و خارج قسمت برابر است با

$$x^2 + 2x - \frac{5}{2}$$

یعنی با یک کسر جبری سروکار داریم و می توان نتیجه تقسیم را این طور نوشت:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 7x + 1}{2x - 1} = x^2 + 2x - \frac{5}{2} - \frac{3}{2(2x - 1)};$$

$$2x^3 + 3x^2 - 7x + 1 =$$

$$= (2x - 1)\left(x^2 + 2x - \frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2}$$

(۳) این تقسیم هم، دارای باقی مانده است:

$$\frac{x^2y^2 + z^2}{xy - z} = x^2y^2 + x^2y^2z + xyz^2 + z^2 + \frac{2z^2}{xy - z};$$

$$x^2y^2 + z^2 =$$

$$= (xy - z)(x^2y^2 + x^2y^2z + xyz^2 + z^2) + 2z^2$$

۳§. کسر جبری

نسبت دو چندجمله‌ای را، کسر جبری گویند. اگر درجه چندجمله‌ای صورت، از درجه چندجمله‌ای مخرج، کوچکتر باشد، کسر را تحقیقی و، اگر درجه چندجمله‌ای صورت با درجه چندجمله‌ای مخرج، برابر یا از آن بزرگتر باشد، کسر را غیر تحقیقی گویند.

همان‌طور که، اندکی قبل در مثال ۲ (مساله‌های ۲ و ۳) دیدیم، هر کسر غیرتحقیقی را می‌توان به مجموع یک چندجمله‌ای با یک کسر تحقیقی تبدیل کرد. کسرهای

$$\frac{2}{x}; \frac{x+2}{x^2+3}; \frac{xy-1}{x^2+y^2-x}$$

تحقیقی و کسرهای

$$\frac{x^2-1}{x+1}; \frac{x^2y-x+5}{x+y}; \frac{x^2+y^2+1}{x+y+1}$$

غیر تحقیقی‌اند (شبیه کسرهای متعارفی بزرگتر از واحد، که می‌شد آن‌ها را، به مجموع یک عدد درست و یک عدد کسری تبدیل کرد). درحالت خاصی که، صورت کسر بر مخرج آن، بخش‌پذیر باشد، کسر جبری، به یک چندجمله‌ای و بدون بخش کسری، تبدیل می‌شود.

عمل روی کسره‌های جبری، شبیه عمل روی کسره‌های متعارفی عددی انجام می‌گردد.

البته، برای ساده کردن کسر جبری و، همچنین، برای تبدیل چند کسر جبری به یک مخرج (وقتی بخواهیم آن‌ها را باهم جمع یا از هم کم کنیم)، باید با قانون‌های مربوط به تجزیه چندجمله‌ای‌ها آشنا باشیم که در فصل بعد، به آن خواهیم پرداخت. در این‌جا، چند مثال ساده، برای عمل روی کسره‌های جبری می‌آوریم:

$$۱) \frac{۲}{x+۲} + \frac{x}{x+۲} = \frac{۲+x}{x+۲} = ۱;$$

$$\begin{aligned} ۲) \frac{x}{x+۱} - \frac{۱}{x-۱} &= \frac{x(x-۱) - (x+۱)}{(x+۱)(x-۱)} = \\ &= \frac{x^۲ - x - x - ۱}{x^۲ - x + x - ۱} = \frac{x^۲ - ۲x - ۱}{x^۲ - ۱}; \end{aligned}$$

$$۳) \frac{x+۱}{x-۱} \times \frac{x-۱}{x^۲+۱} = \frac{(x+۱)(x-۱)}{(x-۱)(x^۲+۱)} = \frac{x+۱}{x^۲+۱};$$

$$\begin{aligned} ۴) \frac{x^۲+۱}{x} : \frac{x+۱}{x^۲} &= \frac{x^۲+۱}{x} \times \frac{x^۲}{x+۱} = \\ &= \frac{(x^۲+۱)x^۲}{x(x+۱)} = \frac{x(x^۲+۱)}{x+۱} \end{aligned}$$

عبارت‌های گویا. هر جمله یا هر چندجمله‌ای و یا نسبت دوجمله‌ای (یعنی کسر جبری) را، یک عبارت جبری ویا، دقیق‌تر، عبارت جبری گویا گویند.

عبارت جبری، وقتی گویا است که تنها شامل عمل‌های جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و توان (با نمای درست)، بین چندجمله‌ای‌ها باشد. در این‌جا،

چند نمونه، از عبارت‌های جبری گویا را آورده‌ایم:

$$2ab; x\sqrt{2} + \frac{1}{y}; \frac{x+y}{z\sqrt{5}}, (2-x)^2$$

ولی عبارت‌های جبری

$$2a\sqrt{b}; \sqrt{x} + \frac{z}{y}; \frac{x+y}{5\sqrt{z}}; (2-x)^{\frac{1}{3}}$$

گویا نیستند.

توجه کنید: $2a\sqrt{b}$ ، نسبت به a گویا و نسبت به b گنگ است؛

$\sqrt{x} + \frac{z}{y}$ ، نسبت به x گنگ و نسبت به z گویا است؛

$\frac{x+y}{5\sqrt{z}}$ ، نسبت به x و y گویا و نسبت به z گنگ است؛

$(2-x)^{\frac{1}{3}}$ ، نسبت به x گنگ است.

۴§. اتحادهای جبری

اتحاد، به معنای «یکی بودن» است. وقتی می‌نویسیم $5 = 5$ ، یا می‌نویسیم

$3x - 2x = x$ ، با یک اتحاد سروکار داریم، زیرا دو طرف برابری، دو

مقدار متفاوت نیست. همچنین، اگر حاصل ضرب

$$(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1)$$

را پیدا کنیم، به دست می‌آید:

$$(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1) = x^4 - x^3 + x^2 + x^3 -$$

$$-x^2 + x - x^2 + x - 1 = x^4 - x^2 + 2x - 1$$

بنابراین، برابری

$$(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1) = x^4 - x^2 + 2x - 1$$

یک اتحاد است، زیرا دوطرف برابری، معرف یک مقدارند: طرف دوم، نتیجه‌ای است از طرف اول.

ضمن ضرب (و همچنین تقسیم) چندجمله‌ای‌ها، اغلب به گونه‌هایی برخورد می‌کنیم که، به دلیل تکرار فراوان آن‌ها در موردهای مختلف، بهتر است، از قبل و برای یکبار، نتیجه ضرب (یا تقسیم) را، به صورت یک «دستور» منظم کنیم تا، هربار، ناچار به انجام عمل ضرب (یا تقسیم) نباشیم. این دستورها، به عنوان مهم‌ترین اتحادها، در ذهن ما می‌مانند و هرجا با نمونه‌هایی شبیه آن‌ها روبه‌رو شدیم، بدون انجام عمل‌های خسته‌کننده و طولانی، نتیجه را می‌نویسیم.

اما، پیش از آن‌که، به کشف این «دستورها» پردازیم، به نکته‌ای اشاره می‌کنیم که، برای تحقیق در «اتحاد بودن» یا «اتحاد نبودن» یک برابری، اهمیت دارد.

بارها به برابری از نوع $x^2 - x = 2$ برخوردیده‌اید. آیا، این برابری، یک اتحاد است. روشن است که پاسخ، منفی است. این، یک معادله است نه یک اتحاد.

معادله و اتحاد، هردو به یاری نماد برابری ($=$) نشان داده می‌شوند، ولی تفاوت عمده‌ای باهم دارند:

در اتحاد، چون دوطرف برابری، معرف یک مقدار هستند، باید هر عدد حقیقی دلخواهی، به جای حرف یا حرف‌ها قرار دهیم، در دوطرف برابری، دو عدد برابر به دست آید. درحالی که در معادله، تنها می‌توان جواب (یا ریشه) معادله را به جای حرف یا حرف‌ها قرار داد تا دو طرف برابر شوند.

$x^2 - x = 2$ یک معادله است، زیرا به جای x ، تنها می‌توان یکی از دو عدد ۱- یا ۲ را قرار داد تا مقدار سمت چپ برابری، برابر ۲ شود.
 $x(x - 1) = x^2 - x$ یک اتحاد است، زیرا به جای x ، هر عدد دلخواهی قرار دهید، دوطرف برابری، باهم برابر درمی‌آیند.

اگر حتی یک عدد پیدا شود که نتواند، دوطرف برابری را، برابر کند، به معنای آن است که، این برابری، اتحاد نیست.
مهم‌ترین اتحادها.

۱) مجذور یک دوجمله‌ای. دوجمله‌ای را، در حالت کلی، می‌توان بصورت $a + b$ یا $a - b$ نوشت. باتوجه به قانون ضرب دو چندجمله‌ای، داریم:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2; \\ (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2; \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

اتحاد دوم را می‌توانستیم به یاری اتحاد اول به دست آوریم.

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= [a + (-b)]^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

مثال. حاصل هریک از این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$\begin{array}{ll} ۱) (2x + y)^2; & ۲) (4a - 5b)^2; \\ ۳) (-x + 3y)^2; & ۴) (a + b - c)^2 \end{array}$$

حل. به ترتیب داریم:

$$۱) (2x + y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)y + y^2 =$$

$$= ۴x^۲ + ۴xy + y^۲;$$

$$\begin{aligned} ۲) (۴a - ۵b)^۲ &= (۴a)^۲ - ۲(۴a)(۵b) + (۵b)^۲ = \\ &= ۱۶a^۲ - ۴۰ab + ۲۵b^۲; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳) (-x + ۳y)^۲ &= (-x)^۲ + ۲(-x)(۳y) + (۳y)^۲ = \\ &= x^۲ - ۶xy + ۹y^۲ \end{aligned}$$

یادداشت. $(-x + ۳y)^۲$ با $(x - ۳y)^۲$ فرق ندارد، زیرا مجذور دو عدد قرینه، یکی است:

$$(-x + ۳y)^۲ = (x - ۳y)^۲ = x^۲ - ۶xy + ۹y^۲$$

۴) $b - c$ را یک جمله فرض می‌کنیم و آن را در داخل پرانتز می‌گذاریم:

$$\begin{aligned} (a + b - c)^۲ &= [a + (b - c)]^۲ = \\ &= a^۲ + ۲a(b - c) + (b - c)^۲ = \\ &= a^۲ + ۲ab - ۲ac + b^۲ - ۲bc + c^۲ \end{aligned}$$

اتحادهای مربوط به مجذور دوجمله‌ای، می‌توانند برای محاسبه ذهنی مجذور بعضی عددها، مورداستفاده قرار گیرند:

$$۴۱^۲ = (۴۰ + ۱)^۲ = ۱۶۰۰ + ۸۰ + ۱ = ۱۶۸۱;$$

$$۳۹^۲ = (۴۰ - ۱)^۲ = ۱۶۰۰ - ۸۰ + ۱ = ۱۵۲۱$$

۲) ضرب دو جمله مزدوج. ابتدا با یک تعریف آشنا شویم.

تعریف. دو عبارت جبری دوجمله‌ای را، مزدوج یکدیگر گویند، وقتی که، یکی از جمله‌های آنها باهم برابر، و جمله دیگرشان، نسبت به هم، قرینه باشند.

دوجمله‌ای $a + b$ را در نظر می‌گیریم. این دوجمله‌ای، دو مزدوج دارد:
 $a - b$ و $-a + b$. همچنین، دوجمله‌ای $x - y$ ، دارای دو مزدوج است:
 $x + y$ و $-x - y$.

اکنون ببینیم، حاصل ضرب دوجمله‌ای‌های مزدوج، به چه نتیجه می‌رسد:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$$

و یا پس از ساده کردن

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

مثال. به یاری ضرب دو عبارت مزدوج، حاصل را بنویسید:

- ۱) $(3x - y)(3x + y)$; ۲) $(\frac{1}{4}a + b)(\frac{1}{4}a - b)$;
- ۳) $(-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y^2)(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y^2)$;
- ۴) $(a + b + c)(a + b - c)$

حل.

$$۱) (3x - y)(3x + y) = (3x)^2 - y^2 = 9x^2 - y^2;$$

$$۲) (\frac{1}{4}a + b)(\frac{1}{4}a - b) = (\frac{1}{4}a)^2 - b^2 = \frac{1}{16}a^2 - b^2;$$

$$\begin{aligned} ۳) (-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y^2)(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y^2) &= \\ &= (\frac{1}{4}y^2)^2 - (\frac{3}{4}x)^2 = \frac{1}{16}y^4 - \frac{9}{16}x^2; \end{aligned}$$

۴) در این جا، اگر $(a + b)$ را یک جمله و c را جمله دوم به حساب آوریم، به ترتیب، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (a + b + c)(a + b - c) &= [(a + b) + c][(a + b) - c] = \\ &= (a + b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2 \end{aligned}$$

از دستور اتحادی مربوط به ضرب دو عبارت مزدوج هم، می‌توان برای محاسبه‌های ذهنی عددهای استفاده کرد:

$$\begin{aligned} 42 \times 38 &= (40 + 2)(40 - 2) = \\ &= 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596; \end{aligned}$$

(۳) مجذور یک چندجمله‌ای. شبیه مثالی که برای $(a + b - c)^2$ حل کردیم، می‌توان با گروه‌بندی جمله‌ها، مجذور هر چندجمله‌ای را به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} (a - b - c + d)^2 &= [(a - b) - (c - d)]^2 = \\ &= (a - b)^2 - 2(a - b)(c - d) + (c - d)^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2ad + 2bc - 2bd + \\ &+ c^2 - 2cd + d^2 \end{aligned}$$

نتیجه را به‌این صورت می‌نویسیم (اول مجذورهای کامل و بعد دو برابر حاصل‌ضرب‌ها):

$$\begin{aligned} (a - b - c + d)^2 &= \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2ac + 2ad + \\ &+ 2bc - 2bd - 2cd \end{aligned}$$

که این قاعده را، برای مجذور یک چندجمله‌ای، به ما تلقین می‌کند:
الف) مجذور همهٔ جمله‌ها را، با علامت مثبت (جمع) به‌دنبال یکدیگر می‌نویسیم؛

ب) دو برابر جملهٔ اول را در هریک از جمله‌های بعد از خود، با رعایت علامت، می‌آوریم؛

پ) بعد، دوبرابر جملهٔ دوم را درهریک از جمله‌های بعد از خود، بازهم با رعایت علامت، می‌نویسیم؛

ت) این عمل، یعنی ضرب دوبرابر هر جمله، در هر یک از جمله‌های بعد از خودش را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که دیگر، جمله‌ای باقی نماند:

$$\begin{aligned} (2x + y - 3z + t - 5s)^2 = \\ = 4x^2 + y^2 + 9z^2 + t^2 + 25s^2 + 4xy - 12xz + \\ + 4xt - 20xs - 6yz + 2yt - 10ys - \\ - 6zt + 30zs - 10ts \end{aligned}$$

۴) ضرب دو عبارت دوجمله‌ای که در یک جمله مشترک‌اند. دوجمله‌ای‌های $x + a$ و $x + b$ ، در جملهٔ اول خود، یعنی x ، مشترک و در جمله‌های دوم خود، یعنی a و b ، با هم اختلاف دارند. اگر آن‌ها را در هم ضرب کنیم:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$

و مجموع دو جملهٔ مشابه ax و bx را به‌صورت $(a + b)x$ بنویسیم، به‌دست می‌آید:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

حاصل ضرب دو عبارت دوجمله‌ای، که در یک جمله مشترک‌اند، برابر است با یک سه‌جمله‌ای: جملهٔ اول این سه‌جمله‌ای، مجذور جملهٔ مشترک، جملهٔ دوم آن، حاصل‌ضرب مجموع دو جملهٔ غیرمشترک در جملهٔ مشترک؛ و جملهٔ سوم آن، حاصل‌ضرب دو جملهٔ غیر مشترک است.

مثال ۱. این حاصل‌ضرب‌ها را، بدون انجام عمل ضرب، پیدا کنید:

$$۱) (a + 3)(a - 2); \quad ۲) (2x + 1)(2x - 4);$$

$$۳) (x + a + b)(x + a - b);$$

$$۴) (\Delta x^۲y - ۳x + ۱)(\Delta x^۲y + ۴x - ۱)$$

حل. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} ۱) (a + ۳)(a - ۲) &= a^۲ + (۳ - ۲)a + ۳(-۲) = \\ &= a^۲ + a - ۶; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲) (۲x + ۱)(۲x - ۴) &= (۲x)^۲ + (۱ - ۴)(۲x) + ۱(-۴) = \\ &= ۴x^۲ - ۶x - ۴; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳) (x + a + b)(x + a - b) &= x^۲ + [(a + b) + (a - b)]x + \\ &+ (a + b)(a - b) = x^۲ + ۲ax + a^۲ - b^۲; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۴) (\Delta x^۲y - ۳x + ۱)(\Delta x^۲y + ۴x - ۱) &= \\ &= (\Delta x^۲y)^۲ + [(-۳x + ۱) + (۴x - ۱)](\Delta x^۲y) + \\ &+ (-۳x + ۱)(۴x - ۱) = \\ ۲\Delta x^۲y^۲ + \Delta x^۲y - ۱۲x^۲ + ۷x - ۱ \end{aligned}$$

مثال ۲. این ضرب‌ها را، در ذهن خود، انجام دهید:

$$۱) ۴۱ \times ۴۳; \quad ۲) ۴۲ \times ۳۷$$

حل.

$$\begin{aligned} ۱) ۴۱ \times ۴۳ &= (۴۰ + ۱)(۴۰ + ۳) = \\ &= ۴۰^۲ + (۱ + ۳) \times ۴۰ + ۱ \times ۳ = \\ &= ۱۶۰۰ + ۱۶۰ + ۳ = ۱۷۶۳; \end{aligned}$$

$$۲) ۴۲ \times ۳۷ = (۴۰ + ۲)(۴۰ - ۳) =$$

$$= 40^2 + (2 - 3) \times 40 + 2 \times (-3) =$$

$$= 1600 - 40 - 6 = 1554$$

۵) مکعب یک دوجمله‌ای. با ضرب مستقیم، می‌توان این دو اتحاد را به‌دست آورد:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

که اگر طرف‌های دوم را، اندکی تغییر دهیم و به‌صورت زیر بنویسیم، هم به‌خاطر سپردن آن‌ها ساده‌تر می‌شود و هم، در حل مساله‌ها، کاربرد بیشتری دارد:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b);$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

دو مثال.

$$۱) (2x - 1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \times 1 + 3(2x) \times 1^2 + (-1)^3$$

$$= 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

$$۲) (a^2 + b - 1)^3 = [a^2 + (b - 1)]^3 =$$

$$= (a^2)^3 + 3(a^2)^2(b - 1) + 3a^2(b - 1)^2 + (b - 1)^3 =$$

$$= a^6 + 3(b - 1)a^4 + 3(b - 1)^2a^2 + (b - 1)^3$$

(که نسبت به توان‌های نزولی a ، منظم است. البته، اگر بخواهیم، پرانتزها را باز کنیم، دشواری عمده‌ای وجود ندارد.)

۶) سه اتحاد دیگر. این اتحادها هم، با ضرب مستقیم، به سادگی به دست می آید:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3;$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3;$$

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = \\ = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

این اتحاد آخری را، پیش از این و ضمن تقسیم $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ بر $x + y + z$ ، به دست آورده ایم.

دو اتحاد دیگر را هم، می توان با تقسیم $a^3 + b^3$ بر $a + b$ و تقسیم $a^3 - b^3$ بر $a - b$ پیدا کرد:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2, a \neq -b;$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2, a \neq b$$

مثال. خارج قسمت ها را، بدون عمل تقسیم، بنویسید:

$$۱) \frac{8x^3 - y^3}{2x - y};$$

$$۲) \frac{27m^3 + 64n^3}{3m + 4n};$$

$$۲) \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} x^2 + y^2; \quad ۴) \frac{a^3 + 8b^3 + c^3 - 6abc}{a + 2b + c}$$

حل. باتوجه به سه اتحاد اخیر، می توان خارج قسمت ها را نوشت. تنها در همه جا، باید شرط کرد که مخارج برابر صفر نباشد.

$$۱) \frac{8x^3 - y^3}{2x - y} = \frac{(2x)^3 - y^3}{2x - y} = 4x^2 + 2xy + y^2;$$

$$۲) \frac{۲۷m^۲ + ۶۴n^۲}{۳m + ۴n} = \frac{(۳m)^۲ + (۴n)^۲}{(۳m) + (۴n)} =$$

$$= ۹m^۲ - ۱۲mn + ۱۶n^۲;$$

$$۳) \frac{x^۹ + z^۶}{x^۳ + y^۲} = \frac{(x^۳)^۳ + (y^۲)^۳}{(x^۳) + (y^۲)} = x^۶ - x^۳y^۲ + y^۴;$$

$$۴) \frac{a^۲ + ۸b^۲ + c^۲ - ۶abc}{a + ۲b + c} = \frac{a^۲ + (۲b)^۲ + c^۲ - ۳a(۲b)c}{a + (۲b) + c} =$$

$$= a^۲ + ۴b^۲ + c^۲ - ۲ab - ac - ۲bc$$

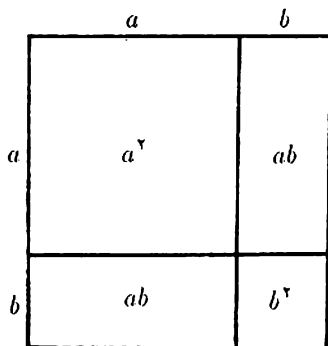
۵۸. اتحادها در طول تاریخ.

ریاضی‌دانان یونان باستان و سپس، ریاضی‌دانان ایرانی، مفهوم اتحاد را می‌شناختند و از آن استفاده می‌کردند. فیثاغورث، ریاضی‌دان یونانی که در سده ششم پیش از میلاد می‌زیست، ضمن بررسی رابطه‌ای که بین ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد، یک رشته اتحاد به دست آورد. البته، استدلال‌های فیثاغورث و دیگر ریاضی‌دانان یونانی (و همچنین ریاضی‌دانان ایرانی بعد از آن‌ها)، بیشتر براساس استفاده از شکل‌های هندسی بود.

در سده سوم پیش از میلاد، اقلیدس، هندسه‌دان بزرگ یونانی، کتاب خود را به نام «مقدمات» نوشت که شامل ۱۳ مقاله بود. مقاله دوم این کتاب، به اتحادهای جبری اختصاص دارد که، البته، با استدلال‌ها و تعبیرهای هندسی آورده‌است. مثلاً در مسأله دهم مقاله دوم از کتاب خود درستی اتحاد

$$(a + b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

را ثابت کرده است. او می‌نویسد: «اگر پاره‌خط راستی را، به دو بخش تقسیم کنیم، آن وقت مربعی که روی تمامی این پاره‌خط راست ساخته می‌شود، برابر است با مجموع مربع‌هایی که روی هر کدام از بخش‌ها ساخته شده و



شکل ۲۳

دو برابر مستطیلی که روی بخش‌ها ساخته می‌شود. در شکل ۲۳، به روشنی دیده می‌شود که مساحت مربع به ضلع $a + b$ ، برابر است با مجموع چهار مساحت: مساحت مربع به ضلع a ، مساحت مربع به ضلع b و مساحت‌های دو مستطیل برابر، با بُعدهای a و b .

دیوفانت، ریاضی‌دان دیگر یونانی که در سدهٔ دوم میلادی در مکتب ریاضی اسکندریه کار می‌کرد، در کتاب «حساب» خود، این اتحادها را ثابت کرد:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

خوارزمی، ریاضی‌دان بزرگ ایرانی هم، برخی از اتحادهای جبری را مطرح و اثبات کرده‌است (در کتاب «حساب» خود. اصل این کتاب تاکنون پیدا نشده‌است، ولی ترجمهٔ لاتینی آن وجود دارد).

نمادهایی که امروز، برای اتحادهای جبری به کار می‌بریم، بیش از همه، کار دو ریاضی‌دان فرانسوی، یعنی «ویت» و «دکارت»، است.

□

* بنابه قضیه فیثاغورث، اگر دو ضلع پهلوی زاویه قائمه را در مثلث قائم الزاویه، به طول‌های a و b و وتر آن را به طول c فرض کنیم، همیشه این رابطه برقرار است:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

اتحادی وجود دارد که، به یاری آن، می‌توان مثلث‌های فیثاغوری را (یعنی مثلث‌های قائم الزاویه‌ای را که طول ضلع‌های آن‌ها، با عددهای طبیعی بیان می‌شود)، پیدا کرد. این اتحاد، که از همان دوران باستان شناخته شده بود، چنین است:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

(آزمایش کنید تا به درستی این اتحاد قانع شوید).

بنابراین، اگر m و n ($m > n$) را دو عدد طبیعی دلخواه بگیریم، آن وقت مثلث فیثاغوری با ضلع‌های a و b و c ، به دست می‌آید:

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$$

چند نمونه از مثلث‌های فیثاغوری را می‌آوریم.

(۱) برای $m = 2$ و $n = 1$ به دست می‌آید:

$$a = 3, b = 4, c = 5$$

(۲) برای $m = 3$ و $n = 2$:

$$a = 5, b = 12, c = 13$$

(۳) به ازای $m = 4$ و $n = 1$:

$$a = 15, b = 8, c = 17$$

(۴) به ازای $m = ۴$ و $n = ۳$:

$$a = ۷, b = ۲۴, c = ۲۵$$

(۵) برای $m = ۱۰$ و $n = ۱$:

$$a = ۹۹, b = ۲۰, c = ۱۰۱$$

(۶) برای $m = ۱۰$ و $n = ۷$:

$$a = ۵۱, b = ۱۴۰, c = ۱۴۹$$

§۶. چند یادآوری مهم

در برخی کتاب‌های ریاضی، و حتی کتاب‌های درسی، از اصطلاح‌ها و نام‌گذاری‌هایی استفاده می‌شود که می‌توانند موجب اشتباه و یا گمراهی شوند. به‌طور کلی، توصیه ما این است که در بیان مفهوم‌های ریاضی، کوشش کنید، جمله را کامل بیان کنید؛ درضمن، از جمله‌ای استفاده کنید که مضمون ریاضی مفهوم را به‌درستی نشان دهد. مثلاً در محاسبه کسر مرکب $\frac{۲}{۵}$ ، هرگز از اصطلاح بی‌معنی (ولی رایج) «دور در دور، نزدیک در نزدیک» استفاده نکنید، زیرا به‌شما نشان نمی‌دهد که با کدام عمل ریاضی سروکار دارید. بیان خود را کامل و به‌صورتی که معرف یک عمل ریاضی باشد، ارائه دهید. بگویید: «برای تقسیم کسر $\frac{۳}{۴}$ بر کسر $\frac{۲}{۵}$ ، باید بخش‌یاب یعنی $\frac{۲}{۵}$ را معکوس و، سپس، در بخشی، یعنی $\frac{۳}{۴}$ ضرب کرد». یا وقتی با معادله‌ای سروکار دارید، نگویید «معلوم مجهول می‌کنیم»، زیرا اولاً این جمله در زبان فارسی هیچ معنایی ندارد (مگر می‌شود، معلوم را مجهول کرد)، ثانیاً معرف هیچ عمل ریاضی نیست. جمله را کامل بیان کنید و بگویید «معلوم‌ها را به یک طرف و مجهول‌ها را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم». و اما درباره اتحادها:

۱) در این کتاب، آگاهانه، اتحادها را شماره‌گذاری نکرده‌ایم. بسیار دیده شده‌است که، دانش‌آموزان، وقتی می‌خواهند، از اتحادی نام ببرند، مثلاً می‌گویند «اتحاد سوم». درحالی که نویسندگان کتاب‌های ریاضی، برحسب سلیقه خود، اتحادها را ردیف می‌کنند و، چه‌بسا، در دو کتاب مختلف، دو اتحاد متفاوت در ردیف سوم آمده‌باشد.

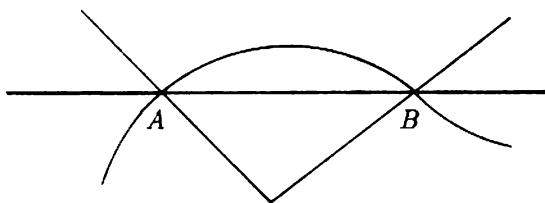
به‌جز این، برخی از دانش‌آموزان، با شماره‌دار بودن اتحادها، ممکن است به این اشتباه بیفتند که، تعداد اتحادها، محدود است و مثلاً، چون در این کتاب از ۱۰ اتحاد مهم نام برده‌ایم، گمان کنند، در جبر، ۱۰ اتحاد وجود دارد. درحالی‌که، همان‌طور که پیش از این هم گفتیم، تعداد اتحادها، بی‌پایان است.

از این‌ها گذشته، بر این مطلب تاکید داریم که، برای درک بهتر مفهوم‌های ریاضیات، باید مضمون هر عمل یا هر رابطه را بیان کرد و از ذکر نام‌های مستعار، پرهیز کرد.

۲) هرگز به اتحاد

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

نگوید: «اتحاد مزدوج». این، خود اتحاد نیست که «مزدوج» است، بلکه دو عبارت جبری $a + b$ و $a - b$ «مزدوج یکدیگرند». دیده شده‌است که، وقتی از دانش‌آموزی می‌پرسند: $(a^2 - b^2)$ چیست؟ پاسخ می‌دهد «اتحاد مزدوج». درست دقت کنید، عبارت $a^2 - b^2$ ، نه اتحاد است (زیرا برابری ندارد) و نه مزدوج (زیرا، برای مزدوج بودن، باید دو عبارت داشته‌باشیم که یکی مزدوج دیگری باشد). درواقع، $a^2 - b^2$ ، یک عبارت جبری است یا یک دوجمله‌ای، یا اگر بخواهیم ماهیت آن را بهتر نشان دهیم، باید بگوییم «تفاضل دو مجذور کامل است». البته، می‌توان گفت: $a^2 - b^2$ به ضرب دو عبارت مزدوج تبدیل می‌شود؛ یا $a^2 - b^2$ از حاصل ضرب دو عبارت مزدوج



شکل ۲۴

$a + b$ و $a - b$ به دست آمده است.

به همین ترتیب، درباره اتحاد

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

نباید گفت «اتحاد جمله مشترک»؛ ولی می توان گفت: «اتحادی که باتوجه به حاصل ضرب دو عبارت جبری که یک جمله مشترک دارند، به دست آمده است».

ریاضیات، دانشی دقیق است و درمورد همه رابطه ها، مفهوم ها، قضیه ها و مساله های آن، این «دقت»، اهمیت دارد. بنابراین، برای بیان هر موضوع ریاضی هم، باید «دقت» کنیم تا مطلبی را به اشتباه یا ناقص نگفته باشیم.

در کتاب درسی هندسه هم، گفته شده است: «از دو نقطه، تنها یک خط عبور می کند». ولی به شکل ۲۴ توجه کنید: از دو نقطه A و B ، سه «خط» گذشته است. درواقع، از دو نقطه A و B ، تعداد بی پایانی «خط» می گذرد که، البته، تنها یکی از آن ها، «خط راست» است. جمله کتاب را باید به این صورت، اصلاح کرد:

«از هر دو نقطه، تنها یک خط راست می گذرد».

ببینید، بی دقتی چه دشواری هایی ایجاد می کند. تنها یک واژه «راست» که به دنبال واژه «خط» بیاید، جمله را درست می کند، درحالی که بدون این واژه، جمله کتاب، نادرست است.

۳) در بسیاری جاها، برای اتحاد، از نماد $(\equiv)$ استفاده می‌کنند که، البته، نادرست نیست، ولی چیزی را هم حل نمی‌کند. به نظر ما، همان نماد برابری $(=)$ ، می‌تواند هم برای معادله به کار رود و هم برای اتحاد. درواقع، برای تعریف اتحاد، مثلاً می‌گوییم: اتحاد، یک برابری است که به ازای هر مقدار دلخواه متغیر یا متغیرها، برقرار باشد.

عادت کنید، در ریاضیات، آنچه لازم است، بگویید و بنویسید، نه چیزی کمتر و نه چیزی بیشتر.

همچنین، در نوشتن عددهای دهمی دوره‌ای، گاهی یک پاره‌خط راست افقی، بالای یک دوره گردش می‌گذراند و مثلاً می‌نویسند:

$$\frac{3}{11} = 0.272727\ldots = 0.\overline{27}$$

این شیوه نوشتن در برخی موردها، ایجاد دشواری و ابهام می‌کند. می‌دانید وقتی بخواهیم عدد سه‌رقمی با یکان c ، دهگان b و صدگان a را نشان دهیم، آن را به صورت $\overline{abc}$ می‌نویسیم (تا با abc ، به معنای $a \times b \times c$ اشتباه نشود). اکنون، اگر درجایی به نماد $0.\overline{abc}$ برخورد کنیم، دچار این ابهام می‌شویم که منظور رقم‌های a و b و c است یا دوره گردش abc ، کدام یک:

$$0.\overline{abc} = \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1000}$$

یا

$$0.\overline{abc} = 0.abcabcabc\ldots$$

بهتر است، همان‌طور که کم‌وبیش در جاهای دیگر هم معمول است، دوطرف دوره گردش، پرانتز بگذاریم

$$\frac{3}{11} = 0.(27)$$

در این صورت $\overline{abc} / ۰$ با $(abc) / ۰$ تفاوت پیدا می‌کند و ابهامی به وجود نمی‌آورد.

۴) چه ضمن نوشتن اتحادها و چه در جاهای دیگر، برای نوشتن یک چندجمله‌ای، در حالت عادی، چندجمله‌ای را نسبت به یکی از حرف‌ها برحسب توان‌های نزولی بنویسید، مگر این‌که شکل دیگری از نوشتن، برای به‌خاطر سپردن راحت‌تر باشد و یا در آن مورد خاص، کار عمل‌های شما را ساده‌تر کند.

تمرین‌ها

۲۰۴. ضرب کنید:

$$۱) (x^2 + 2x^2 - x + 3)(x^2 - 2x^2 + x - 3);$$

$$۲) (a + b)(a^2 - a^2b + a^2b^2 - ab^2 + b^2);$$

$$۳) (xy - t)(x^2y^2 + x^2y^2t + xyt^2 + t^2);$$

$$۴) (a + b - 1)(a^2 + b^2 - ab + a + b + 1);$$

$$۵) (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6);$$

$$۶) (x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

۲۰۵. تقسیم کنید:

$$۱) (2x^2 - x - 3) : (x + 1);$$

$$۲) \frac{72a^2b - 12a^2b^2 + 4a^2b^3 - 2ab^4}{2ab};$$

$$۳) \frac{28x^5 + 6x^6 - 15x^5 + 11x^4 - 3x^3}{7x^4 + 5x^3 - 3x^2};$$

$$۴) \frac{9x^6 + 99x^5 + 26x^4 + 34x^3 + 12x^2}{12x^4 + 4x}$$

$$۵) \frac{a^6 - b^6}{a - b}; \quad ۶) \frac{a^5 + b^5}{a + b};$$

$$۷) \frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}; \quad ۸) \frac{x^6 + y^6}{x + y};$$

*۲۰۶. می‌دانیم $۱۰a^2 + ۵ab - ۳b^2 = ۰$ و $۹a^2 - b^2 \neq ۰$ مطلوب است، محاسبه

$$\frac{2a - b}{3a - b} + \frac{5b - a}{3a + b}$$

*۲۰۷. اگر x و y ، عددهایی طبیعی باشند، کسر

$$A = \frac{x^2 + x + 1}{xy - 1}$$

برابر با چه مقدارهای درستی می‌تواند باشد؟

*۲۰۸. ثابت کنید، به شرط $x + y + z + t = ۰$ ، داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 3(xy - zt)(z + t)$$

*۲۰۹. حاصل عددی این عبارت را پیدا کنید:

$$P = 3\frac{1}{117} \times 4\frac{1}{119} - 1\frac{116}{117} \times 5\frac{118}{119} - \frac{5}{119}$$

*۲۱۰. نتیجه عددی این عبارت را پیدا کنید:

$$M = 70(71^9 + 71^8 + 71^7 + \dots + 71^2 + 71) + 1$$

*۲۱۱. اگر x و y عددهایی طبیعی باشند، به ازای چه مقدارهایی از

$x^2 + 2xy + 2y^2$ و $x^2 - 2xy + 2y^2$ دست‌کم یکی از عددهای ۵ ، بخش‌پذیر است؟

۲۱۲. به کمک دستوره‌های اتحادی، حاصل این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$۱) (5a - 3b)^2; \quad ۲) \left(\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} \right)^2;$$

$$۳) \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c-d}{3} \right)^2; \quad ۴) (2t - 1)^2;$$

$$۵) (3t + 2)^2; \quad ۶) (x^2 + y^2)^2;$$

$$۷) (2p + 3q)(2p - 3q);$$

$$۸) (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$$

$$۹) (2a - 3b + c)(2a + 3b - c);$$

$$۱۰) (x - 5)(x + 2); \quad ۱۱) (a + 7)(a - 3);$$

$$۱۲) (4x + 11)(4x - 9); \quad ۱۳) (xy + 2a)(xy - 3a);$$

$$۱۴) (x + 2a - 3)(x - a + 4);$$

۲۱۳. حاصل عددی این توان‌ها و ضرب‌ها را، به صورت ذهنی، به دست

آورید:

$$۱) 52^2; \quad ۲) 33 \times 27; \quad ۳) 59^2;$$

$$۴) 71 \times 72; \quad ۵) 83 \times 78; \quad ۶) 104 \times 96$$

* ۲۱۴. قانونی برای محاسبه ذهنی مجذور عددهای دورقمی که به ۵

ختم شده‌اند مثل ۳۵ یا ۸۵، پیدا کنید.

* ۲۱۵. آیا هر عدد اول می‌تواند یکی از ضلع‌های پهلوی زاویه قائمه در

مثلث فیثاغوری (مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های آن، عددهایی طبیعی

است)، باشد؟ برای وتر چنین مثلث‌هایی چطور؟

* ۲۱۶. به شرط $a^2 + a + 1 = 0$ مطلوب است محاسبه

$$a^{1373} + \frac{1}{a^{1373}}$$

*۲۱۷. ثابت کنید، تفاضل مجذورهای دو عدد درست، که بر ۲ و ۳ بخش پذیر نباشند، بر ۲۴ بخش پذیر است.

*۲۱۸. به ازای چه مقدارهایی از عدد طبیعی n ، حاصل عبارت

$$N = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$$

بر ۱۰ بخش پذیر است؟

*۲۱۹. این مجموع را محاسبه کنید:

$$A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2$$

*۲۲۰. ثابت کنید، عدد

$$B = \underbrace{99\dots9}_\text{بار } (n-1) \underbrace{00\dots0}_\text{بار } (n-1) \underbrace{299\dots9}_\text{بار } n$$

برابر است با توان سوم یک عدد طبیعی.

*۲۲۱. روی یک شکل، درستی اتحاد زیر را نشان دهید:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

*۲۲۲. اگر داشته باشیم:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1374$$

برای عددهای طبیعی x و y ، چند زوج جواب به دست می آید؟

*۲۲۳. این عدد را در نظر می گیریم.

$$B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 95^2$$

ثابت کنید، عدد B بر عددهای ۹۶ و ۱۰۰ بخش پذیر است. باقی مانده حاصل از تقسیم عدد B بر ۹۷ را پیدا کنید.

*۲۲۴. در مربعی با ضلع به طول a ، مستطیلی را با مساحت برابر S محاط کرده ایم، به نحوی که، هر رأس این مستطیل روی یکی از ضلع های مربع باشد (دو رأس مستطیل روی یک ضلع مربع نیستند). طول قطر این مستطیل را محاسبه کنید.

*۲۲۵. از رأس A در مربع $ABCD$ با ضلع به طول برابر a ، خط راستی گزینده ایم تا ضلع BC را در M و ادامه ضلع DC را در N قطع کند (A و B و C و D را، به همین ردیف و در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت، در رأس های مربع قرار دهید). ثابت کنید:

$$\frac{1}{|CM|} - \frac{1}{|CN|} = \frac{1}{a}$$

(منظور از $|CM|$ ، طول پاره خط راست CM و منظور از $|CN|$ ، طول پاره خط راست CN است).

*۲۲۶. نقطه های M و N ، نقطه های وسط ضلع های CD و DA از متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند. خط های راست AM و BN ، در نقطه P به هم رسیده اند. مساحت مثلث ANP ، چه بخشی از مساحت متوازی الاضلاع مفروض را تشکیل می دهد؟

*۲۲۷. ثابت کنید، عدد $2^{99} + 2^9$ بر ۱۰۰ بخش پذیر است.

*۲۲۸. x و y چه عددهایی باشند تا داشته باشیم:

$$x^2 + y^2 + x + 3y + 5 = 0$$

۹. تجزیه چند جمله‌ای‌ها به صورت ضرب عامل‌ها

۱۶. روش‌های تجزیه چند جمله‌ای‌ها

چند جمله‌ای را، گاهی می‌توان به صورت ضرب دو یا چند چند جمله‌ای تبدیل کرد. اگر چنین عملی ممکن باشد، می‌گویند: چند جمله‌ای، به صورت ضرب دو یا چند عامل تجزیه شده است.

تجزیه چند جمله‌ای‌ها، برای ساده کردن کسرهای جبری، پیدا کردن مجموع چند کسر جبری، حل معادله‌ها و بسیاری جاهای دیگر، لازم است. البته، همیشه نمی‌توان یک چند جمله‌ای را به صورت ضرب عامل‌های ساده‌تر، تجزیه کرد و، در حالت‌هایی که این تجزیه ممکن باشد، اغلب با دشواری می‌توان به نتیجه رسید. در واقع، یک قانون کلی، برای تجزیه چند جمله‌ای‌ها وجود ندارد و، اگر از حالت‌های ساده بگذریم، در هر مورد خاص، باید روش خاصی برای تجزیه جست‌وجو کرد. و این، در حالی است که «تجزیه»، اغلب می‌تواند به ساده شدن عبارت‌های جبری یاری رساند. در این فصل، از روش‌های ساده‌ای که می‌توانند در تجزیه چند جمله‌ای‌ها، به ما کمک کنند، صحبت شده است. برخی از روش‌های پیچیده‌تر هم، ضمن حل مساله‌ها آمده است.

۱. روش پیدا کردن سازه یا عامل مشترک (فاکتورگیری). اگر همه جمله‌های چند جمله‌ای، در عامل یا عامل‌هایی مشترک باشند، می‌توان عامل یا عامل‌های مشترک را از آن‌ها جدا کرد.

چند جمله‌ای $a^2 - ab$ را در نظر بگیرید. هر دو جمله a^2 و $-ab$ ، دارای عامل a هستند (به زبان دیگر، هر دو بر a بخش پذیرند). a را می‌نویسیم و در سمت راست آن، پرانتزی باز می‌کنیم؛ در داخل پرانتز، خارج قسمت

چندجمله‌ای مفروض بر a را قرار می‌دهیم.

$$a^2 - ab = a(a - b)$$

$$\forall a^2 xy - 14a^5 x^2 = \forall a^2 x(y - 2a^3 x^2) \quad \text{مثال ۱.}$$

مثال ۲.

$$6x^2 y^3 - 2uxy^2 + 4u^2 xy =$$

$$2xy(3xy^2 - uy + 2u^2)$$

۲. کلی‌تر کردن روش فاکتورگیری. گاهی می‌توان، جمله‌های چندجمله‌ای

را به دو یا چند گروه تقسیم کرد و سپس، در هر گروه، عامل‌های مشترک را پیدا کرد. این روش وقتی کارساز است که: (۱) تعداد جمله‌ها، در همه گروه‌ها، یکی باشد؛ (۲) عبارت‌هایی که، در گروه‌های مختلف، در درون پرانتزها پدید می‌آید، یکسان باشند. در این صورت، این عبارت مشترک (که در داخل پرانتزهاست)، به نوبه خود، عامل مشترکی می‌شود که، چندجمله‌ای را تجزیه می‌کند.

مثال ۳.

$$ax + bx + ay + by =$$

$$= x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$$

مثال ۴.

$$10a^2 - 6b^2 + 4ab^2 - 15a^2 b =$$

$$= (10a^2 - 15a^2 b) + (4ab^2 - 6b^2) =$$

$$= 5a^2(2a - 3b) + 2b^2(2a - 3b) = (2a - 3b)(5a^2 + 2b^2)$$

یادداشت. باید توجه داشت که، در صورت لزوم، می‌توان $b - a$ را به صورت $-(a - b)$ نوشت تا جمله‌های مشترک به‌روشنی دیده شوند و اشتباهی پیش نیاید.
مثال ۵.

$$\begin{aligned} 6ax - 2bx + 9by - 27ay &= \\ &= 2x(3a - b) + 9y(b - 3a) = \\ &= 2x(3a - b) - 9y(3a - b) = (3a - b)(2x - 9y) \end{aligned}$$

۳. تبدیل جمله‌ای از چندجمله‌ای. گاهی برای استفاده از روش گروه‌بندی، لازم می‌شود، جمله‌ای از چندجمله‌ای را به مجموع یا تفاضل دوجمله تبدیل کنیم.
مثال ۶.

$$\begin{aligned} p^2 + pq - 2q^2 &= \\ &= p^2 + 2pq - pq - 2q^2 = p(p + 2q) - q(p + 2q) = \\ &= (p + 2q)(p - q) \end{aligned}$$

مثال ۷.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 3x - 1 &= \\ &= 4x^2 - 4x + x - 1 = 4x(x - 1) + (x - 1) = \\ &= (x - 1)(4x + 1) \end{aligned}$$

۴. استفاده از اتحادها. باتوجه به اتحادها و این‌که هر اتحاد، به‌معنای آن است که دوطرف برابری، درواقع یکی هستند، یعنی یک چندجمله‌ای،

به دو صورت مختلف نوشته شده‌است، می‌توان برخی از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه کرد.

مثال ۸.

$$\begin{aligned} 4x^2 + 20xy + 25y^2 &= \\ &= (2x)^2 + 2(2x)(5y) + (5y)^2 = (2x + 5y)^2 \end{aligned}$$

مثال ۹.

$$\begin{aligned} a^2b^2 - c^2 &= (ab^2)^2 - (c^2)^2 = \\ &= (ab^2 + c^2)(ab^2 - c^2) \end{aligned}$$

مثال ۱۰.

$$\begin{aligned} 8x^2 + 125 &= (2x)^2 + 5^2 = \\ &= (2x + 5)(4x^2 - 10x + 25) \end{aligned}$$

مثال ۱۱.

$$\begin{aligned} t^2 + 11t + 24 &= \\ t^2 + (8 + 3)t + 8 \times 3 &= (t + 8)(t + 3) \end{aligned}$$

موفقیت در تجزیه چندجمله‌ای‌ها، اغلب، بستگی به این دارد که بتوانیم، روش‌های یاد شده را به هم ترکیب کنیم.

مثال ۱۲.

$$\begin{aligned} 12 + x^2 - 4x - 3x^2 &= \\ &= (12 - 3x^2) + (x^2 - 4x) = 3(4 - x^2) - x(4 - x^2) = \\ &= (4 - x^2)(3 - x) = (2 + x)(2 - x)(3 - x) \end{aligned}$$

۵. تجزیه یک سه جمله‌ای درجه دوم. برخی از سه جمله‌ای‌های درجه دوم را، می‌توان بدون دشواری و با روش‌های مختلف، تجزیه کرد، ولی راه‌حلی کلی وجود دارد که، هر سه جمله‌ای درجه دوم را، به شرطی که قابل تجزیه باشد، می‌توان به یاری آن تجزیه کرد. با مثالی، مطلب را روشن می‌کنیم.

مثال ۱۳. می‌خواهیم، سه جمله‌ای درجه دوم $x^2 - 3x - 18$ را تجزیه کنیم

روش اول. جمله $-3x$ را به صورت $-6x + 3x$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 18 &= (x^2 - 6x) + (3x - 18) = \\ &= x(x - 6) + 3(x - 6) = (x - 6)(x + 3) \end{aligned}$$

روش دوم. از اتحاد

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

استفاده می‌کنیم. سه جمله‌ای $x^2 - 3x - 18$ ، به ضرب دو پرانتز تجزیه می‌شود که جمله مشترک آن‌ها برابر است با x

$$x^2 - 3x - 18 = (x \quad)(x \quad)$$

دوجمله غیرمشترک درون پرانتزها، باید چنان باشند که جمع جبری آن‌ها برابر -3 و حاصل ضرب آن‌ها برابر -18 شود. عدد 18 را به چند طریق می‌توان به صورت ضرب دو عدد نوشت

$$18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$$

۱ و ۱۸ یا ۲ و ۹، با هر علامتی که در نظر گرفته شوند، نمی‌توانند مجموعی برابر -3 داشته باشند، ولی دو عدد -6 و 3 ، مجموعی برابر -3 دارند. یعنی

$$x^2 - 3x - 18 = (x - 6)(x + 3)$$

روش سوم (روش کلی). جمله‌های درجه دوم و درجه اول این سه جمله‌ای را در نظر می‌گیریم: $x^2 - 3x$ ؛ ببینیم چه عددی به این دو جمله باید اضافه کنیم تا سه جمله‌ای حاصل، مجذور یک دوجمله‌ای شود. این عدد عبارت است از مجذور نصف ضریب x . ضریب x برابر -3 ، نصف آن $-\frac{3}{2}$ و مجذور آن برابر $\frac{9}{4}$ است. در این صورت سه جمله‌ای $x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ ، با مجذور یک دوجمله‌ای برابر است:

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

اکنون، به تجزیه سه جمله‌ای اصلی می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 18 &= \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} - 18 = \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} = \left(x - \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\right) \left(x - \frac{3}{2} - \frac{9}{2}\right) = \\ &= (x + 3)(x - 6) \end{aligned}$$

در حالی که سه جمله‌ای درجه دوم، دارای ضریبی مخالف واحد باشد، ابتدا، از این ضریب فاکتور بگیرید، سپس، عمل‌ها را ادامه دهید. مثال ۱۴. سه جمله‌ای $5x^2 - 13x - 6$ را تجزیه کنید.

حل. تجزیه این سه جمله‌ای با روش‌های اول و دوم مثال ۱۳، کار را اندکی دشوار می‌کند. ولی با روش کلی به مشکلی بر نمی‌خوریم. همان‌طور که گفتیم، در آغاز از ضریب x^2 ، یعنی ۵ فاکتور می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 13x - 6 &= 5 \left(x^2 - \frac{13}{5}x - \frac{6}{5}\right) = \\ &= 5 \left[\left(x^2 - \frac{13}{5}x + \frac{169}{100}\right) - \frac{169}{100} - \frac{6}{5} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 5 \left[\left(x - \frac{13}{10} \right)^2 - \frac{289}{100} \right] = \\
 &= 5 \left(x - \frac{13}{10} + \frac{17}{10} \right) \left(x - \frac{13}{10} - \frac{17}{10} \right) = \\
 &= 5 \left(x + \frac{2}{5} \right) (x - 3) = (5x + 2)(x - 3)
 \end{aligned}$$

مثال ۱۵.

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 12x + 1 &= \\
 &= 4 \left(x^2 - 3x + \frac{1}{4} \right) = 4 \left[\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) - \frac{9}{4} + \frac{1}{4} \right] = \\
 &= 4 \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - 2 \right] = \\
 &= 4 \left(x - \frac{3}{2} + \sqrt{2} \right) \left(x - \frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) = \\
 &= (2x - 3 + 2\sqrt{2})(2x - 3 - 2\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

مثال ۱۵. ثابت کنید سه جمله‌ای $x^2 - 4x + 13$ را نمی‌توان به ضرب دو عامل درجه اول تجزیه کرد.
حل. با همان روش کلی عمل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + 13 &= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 13 = \\
 &= (x - 2)^2 + 9
 \end{aligned}$$

و روشن است که دیگر نمی‌توان کار را ادامه داد. درواقع، سه جمله‌ای ما، به مجموع دو مقدار غیرمنفی (یا به مجموع دو مجذور کامل) تبدیل شده‌است و این، به معنای آن است که معادله درجه دوم

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

۲۴. تعیین بزرگترین بخش‌یاب مشترک و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله‌ای‌ها.

اگر بتوانیم چند جمله‌ای‌های مفروض را، به ضرب عامل‌ها، تجزیه کنیم، شبیه عددهای طبیعی، می‌توانیم بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک آن‌ها را به دست آوریم.

مثال ۱. مطلوب است بزرگترین بخش‌یاب مشترک و کوچکترین مضرب مشترک، بین چند جمله‌ای‌های

$$x^5 - 3x^3 + 2x^2 \text{ و } x^4 - 5x^2 + 4x$$

حل. در آغاز، هریک از چند جمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ۱) \quad x^5 - 3x^3 + 2x^2 &= x^2(x^3 - 3x + 2) = \\ &= x^2[(x^3 - x) + (-2x + 2)] = \\ &= x^2[x(x^2 - 1) - 2(x - 1)] = \\ &= x^2[x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1)] = \\ &= x^2(x - 1)(x^2 + x - 2) = x^2(x - 1)[(x^2 - x) + (2x - 2)] \\ &= x^2(x - 1)[x(x - 1) + 2(x - 1)] = x^2(x - 1)^2(x + 2); \\ ۲) \quad x^4 - 5x^2 + 4x &= x^2(x^2 - 5x + 4) = \\ &= x^2[(x^2 - x) + (-4x + 4)] = \\ &= x^2[x(x - 1) - 4(x - 1)] = x^2(x - 1)(x - 4) \end{aligned}$$

به این ترتیب با این دو عبارت سروکار داریم:

$$x^2(x - 1)^2(x + 2) \text{ و } x^2(x - 1)(x - 4)$$

بزرگترین بخش‌یاب مشترک برابر است با حاصل ضرب عامل‌های مشترک (پایه‌های مشترک با نماهای کوچکتر)، یعنی

$$x^2(x-1)$$

و کوچکترین مضرب مشترک، برابر است با حاصل ضرب عامل‌های مشترک (با نماهای بزرگتر) در عامل‌های غیرمشترک، یعنی

$$x^2(x-1)^2(x+2)(x-4)$$

کوچکترین مضرب مشترک را، به این ترتیب هم می‌توان به دست آورد که، یکی از چندجمله‌ای‌ها را، بر بزرگترین بخش‌یاب مشترک تقسیم، و خارج قسمت حاصل را در چندجمله‌ای دیگر ضرب کنیم. در مثال بالا، اگر چندجمله‌ای $x^2 - 5x^2 + 4x^2$ را بر $x^2(x-1)$ (بزرگترین بخش‌یاب مشترک) تقسیم کنیم:

$$\frac{x^2 - 5x^2 + 4x^2}{x^2(x-1)} = \frac{x^2(x-1)(x-4)}{x^2(x-1)} = x-4$$

از ضرب این خارج قسمت در چندجمله‌ای دوم، کوچکترین مضرب مشترک چندجمله‌ای‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & [(x-4)] \times [x^2(x-1)^2(x+2)] = \\ & = x^2(x-1)^2(x+2)(x-4) \end{aligned}$$

ولی اغلب پیش می‌آید که نمی‌توانیم چندجمله‌ای‌ها را تجزیه کنیم. در این صورت، می‌توان با تقسیم‌های متوالی، ابتدا بزرگترین بخش‌یاب مشترک را پیدا کرد و، سپس به یاری آن (و طبق قاعده‌ای که هم‌اکنون آوردیم)، کوچکترین مضرب مشترک را به دست آورد.

مثال ۲. بزرگترین بخششیاب مشترک و کوچکترین مضرب مشترک این چندجمله‌ای‌ها را پیدا کنید:

$$A = x^3 + 2x^2 + 3x^2 + 2x + 8;$$

$$B = x^3 + 2x^2 - x + 6$$

حل. چندجمله‌ای A را بر چندجمله‌ای B تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت برابر x و باقی‌مانده حاصل از تقسیم، برابر $4x^2 - 4x + 8$ ، یا $4(x^2 - x + 2)$ می‌شود. اکنون، بخششیاب، یعنی

$$x^3 + 2x^2 - x + 6$$

را بر این باقی‌مانده تقسیم می‌کنیم. برای تقسیم، می‌توان از ضریب عدی ۴ (در باقی‌مانده) صرف‌نظر کرد، تا از پیدایش ضرب‌های کسری فرار کنیم. دراین تقسیم، خارج قسمت برابر $x + 3$ و باقی‌مانده برابر صفر می‌شود:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x + 6}{x^2 - x + 2} = x + 3$$

این آخرین بخششیاب (یعنی $x^2 - x + 2$)، یعنی وقتی که باقی‌مانده برابر صفر شد، همان بزرگترین بخششیاب مشترک است. به این ترتیب، بزرگترین بخششیاب مشترک چندجمله‌ای‌های A و B برابر $x^2 - x + 2$ است. اگر A و B را بر این بخششیاب مشترک تقسیم کنیم، هم درستی نتیجه‌گیری روشن می‌شود و هم تجزیه دو عبارت A و B به دست می‌آید:

$$A = (x^2 - x + 2)(x^2 + 3x + 4);$$

$$B = (x^2 - x + 2)(x + 3)$$

اکنون برای پیدا کردن کوچکترین مضرب مشترک بین A و B ، مثلاً خارج قسمت B بر $x^2 - x + 2$ را در A ضرب می‌کنیم. به این ترتیب، کوچکترین مضرب مشترک بین A و B چنین می‌شود:

$$(x + 3)(x^2 - x + 2)(x^2 + 3x + 4)$$

روشن است، برای ساده کردن کسرها (که به بزرگترین بخشایاب مشترک صورت و مخرج نیاز داریم) و جمع و تفریق کسرها (که به کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها نیازمندیم، می‌توان از همین روش استفاده کرد.
مثال ۳. این کسر را ساده کنید:

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 7x + 2}{x^3 - 3x^2 - 2x^2 - 3x + 1}$$

حل. باید بزرگترین بخشایاب مشترک صورت و مخرج را پیدا کرد. دوباره تاکید می‌کنیم که، چون در تقسیم‌های متوالی، نیازی به خارج قسمت نداریم و تنها به باقی‌مانده تقسیم توجه داریم، هر جا که لازم است، می‌توانیم چندجمله‌ای‌ها را در عددی ضرب و یا بر عددی تقسیم کنیم، تا دچار ضریب‌های کسری نشویم.

ابتدا مخرج را بر صورت تقسیم می‌کنیم، خارج قسمت برابر $x - 1$ و باقی‌مانده تقسیم برابر $3x^2 - 12x + 3$ می‌شود که با تقسیم آن بر عدد ۳، می‌توان باقی‌مانده را $x^2 - 4x + 1$ در نظر گرفت. اکنون باید چندجمله‌ای صورت (بخشایاب تقسیم قبلی) را بر $x^2 - 4x + 1$ تقسیم کنیم. در این تقسیم، خارج قسمت برابر $x + 2$ و باقی‌مانده برابر صفر می‌شود. در نتیجه، آخرین بخشایاب، یعنی $x^2 - 4x + 1$ ، بزرگترین بخشایاب مشترک بین چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج است. اگر صورت و مخرج را بر

$$x^2 - 4x + 1$$

تقسیم کنیم، هم تجزیه عبارت‌های صورت و مخرج به دست می‌آید و هم کسر ساده می‌شود:

$$x^2 - 2x^2 - 7x + 2 = (x^2 - 4x + 1)(x + 2);$$

$$x^2 - 3x^2 - 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 - 4x + 1)(x^2 + x + 1)$$

و در نتیجه

$$\frac{x^2 - 2x^2 - 7x + 2}{x^2 - 3x^2 - 2x^2 - 3x + 1} = \frac{x + 2}{x^2 + x + 1}$$

تمرین‌ها

۲۲۹. به ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۱) $12a^2b - 18ab^2 + 6ab;$

۲) $3x(a - 2b) + 5y(a - 2b) + a - 2b;$

۳) $14x^2y(8a + 5b) - 35xy^2(8a + 5b);$

۴) $3a^2b^2 - 12ab^2;$ ۵) $x^2 - y^2;$

۶) $a^2 - b^2;$ ۷) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy;$

۸) $x^2 + x^2y^2 + y^2;$ ۹) $x^2 + y^2;$

۱۰) $x^2 - x^2y^2 + y^2;$ ۱۱) $x^2 - 5x^2 + 4;$

۱۲) $ab(a + b) + bc(b - c) - ac(a + c);$

۱۳) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2;$

۱۴) $2t^2 + t^2 + 4t^2 + t + 2;$

۱۵) $x^2 - 2x^2 + 12x - 8$

*۲۳۰. به ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

- ۱) $(a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$;
- ۲) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$;
- ۳) $-(x + y)^2 + (y - z)^2 + (z + x)^2$
- ۴) $a^5 + a + 1$;
- ۵) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) - 120$;
- ۶) $(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)$

۲۳۱. حاصل عمل‌ها را به دست آورید:

- ۱) $\frac{m}{a^2b} + \frac{n}{ab^2}$, ۲) $\frac{x}{a-b} + \frac{y}{b-a}$;
- ۳) $\frac{a-b}{2a^2 - ab - 3b^2} - \frac{a+b}{2a^2 - 5ab + 3b^2}$;
- ۴) $\frac{x^2 - a^2}{x^2 - bx + cx - bc} : \frac{x^2 - ax - cx + ac}{x^2 - b^2}$;
- ۵) $\frac{5a}{a+b} - \frac{2a-3b}{a-b} - \frac{2(a^2 - 3ab + b^2)}{a^2 - b^2}$;
- ۶) $\frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}} : \frac{x^2y^2}{(x+y)^2 + (x-y)^2}$;
- ۷) $\left[\left(\frac{3}{a} - \frac{a}{4} - \frac{1}{a} \right) : \frac{2-a}{4} - \left(1 + \frac{2}{a} \right) \right] : \frac{a}{4-a}$

۲۳۲. این کسرها را ساده کنید:

$$۱) \frac{5a^2 - 5ax}{a^2 - x^2}; \quad ۲) \frac{81a^2 - 16b^2}{3a + 2b};$$

$$۳) \frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2}; \quad ۴) \frac{32a^5 - b^5}{2a - b}$$

$$۵) \frac{a^2 + 4a^2 + 16}{a^2 + 8}; \quad ۶) \frac{24x^6 - 375y^9}{4x^5 + 10x^2y^2 + 25xy^6}$$

$$۷) \frac{\frac{m^2 + n^2}{n} - m}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}} \times \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2};$$

$$۸) \left(\frac{1}{x + \frac{1}{y+z}} : \frac{1}{x + \frac{1}{y}} \right) - \frac{1}{y \left(\frac{xy}{z} + x + \frac{1}{z} \right)};$$

$$۹) \frac{17x^2 - 16x - 1}{17x^2 + 18x + 1} : \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

۲۳۳. $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ را به ضرب دو عامل تجزیه کنید، به نحوی که یکی از عامل‌ها برابر $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ باشد.

۲۳۴. به شرط $h = \frac{rH}{R-r}$ ، عبارت

$$\frac{1}{3}\pi R^2(H+h) - \frac{1}{3}\pi r^2h$$

را به ساده‌ترین صورت خود بنویسید.

۲۲۵. حاصل این عبارت‌ها را پیدا کنید:

$$(۱) \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab - b^2} \text{ به ازای } a = -۰/۵ \text{ و } b = -۱/۵$$

$$(۲) \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a + b + c} \text{ به ازای } a = ۰/۲۵, b = \frac{2}{3}, c = -۰/۵$$

$$(۳) \frac{x^2 - 3ax}{b^2 + ab - 2a^2} \text{ به ازای } x = a - b$$

۲۳۶. می‌دانیم $a + b = -۱$ و $ab = ۱$ ، مطلوب است محاسبه

$$۱) a^2 + b^2; \quad ۲) a^3 + b^3; \quad ۳) a^4 + b^4;$$

$$۴) \frac{1}{a^{12}} + \frac{1}{b^{12}}; \quad ۵) a^9 + b^9; \quad ۶) a^{16} + b^{16}$$

* ۲۳۷. با فرض $c^2 + 2(ab - bc - ac) = ۰$ و $a + b \neq c$

$b \neq c$ ثابت کنید:

$$\frac{a^2 + (a - c)^2}{b^2 + (b - c)^2} = \frac{a - c}{b - c}$$

* ۲۳۸. کسر $\frac{x^{15} + 1}{x^{25} + 1}$ را ساده کنید ($x \neq -۱$).

* ۲۳۹. این کسر را ساده کنید:

$$\frac{(a^2 + b^2)(a + b)^2 + 2a^2b^2}{(a^2 + b^2)(a + b)^2 + a^2b^2}$$

* ۲۴۰. ثابت کنید، عدد ۲۴۴۱۴۱۶۴۹ ، عددی مرکب است، یعنی

می‌توان آن را به صورت ضرب دو عدد (که هیچ‌کدام برابر واحد نباشد) نوشت.

* ۲۴۱. ثابت کنید، عدد

$$9x^5 - 5x^2 - 4x$$

به ازای هر عدد درست x ، بر ۱۲۰ بخش پذیر است.

*۲۴۲. x و y را پیدا کنید، به شرطی که

$$(\overline{xy})^2 = \overline{(y-1)xy}$$

*۲۴۳. این کسر را ساده کنید:

$$\frac{295 - 413\sqrt{2} + 177\sqrt{4}}{5 + 3\sqrt{4} - 7\sqrt{2}}$$

*۲۴۴. ثابت کنید، برای این که داشته باشیم:

$$\frac{y+z-x}{yz} + \frac{z+x-y}{xz} = \frac{x+y-z}{xy}$$

باید داشته باشیم $x+y=z$ یا $x+z=y$ (و x و y و z ، مخالف صفرند).

*۲۴۵. این کسر را ساده کنید:

$$\frac{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}{a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a)}$$

*۲۴۶. مطلوب است محاسبه

$$۱) S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n;$$

$$۲) S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$۳) S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

حلّ مسأله‌ها

ریاضیات بیشتر شیوه عمل است تا شیوه یادگیری
برآور

پیش از آغاز

۱. از ۲ آغاز شده‌است و عددهای طبیعی، پشت سرهم، به ردیف آمده‌اند. بنابراین، سه عدد بعدی عبارتند از ۸، ۹ و ۱۰.

* یادداشت ۱. وقتی عددها، طبق قانونی به دنبال هم بیایند، به نحوی که با آگاهی از آن قانون بتوان آن را ادامه داد، به این ردیف عددها، دنباله، یا دقیق‌تر دنباله عددی و به هر عدد آن، یک جمله از دنباله گویند. در این جا، با دنباله عددهای طبیعی (با آغاز از ۲) سروکار داشتیم. معمولاً در ریاضیات با دنباله‌های بی‌پایان (نامتناهی) سروکار داریم.

بهترین دنباله‌ها، آن‌هایی هستند که بتوان جمله‌های پشت سرهم را، در آن، از روی دستوری (که به شکل یک فرمول ریاضی باشد) پیدا کرد. اگر چنین دستوری برای تعیین جمله‌های یک دنباله وجود داشته باشد. آن را جمله عمومی دنباله گویند و معمولاً با u_n نشان می‌دهند که معرف جمله n ام دنباله است. مثلاً، جمله عمومی، برای دنباله عددهای طبیعی، چنین است:

$$u_n = n$$

اگر به جای n ، عدد ۱ را قرار دهیم، نخستین عدد طبیعی به دست می‌آید:

$$u_1 = 1$$

و اگر به جای n ، عدد ۱۰ را قرار دهیم، دهمین عدد طبیعی به دست می آید:

$$u_{10} = 10$$

ولی گاهی n ، معرف ردیف جمله نیست، چراکه ممکن است، مقدار n ، از ۲ یا ۳ یا عدد دیگری آغاز شود. مثلاً در مساله ماهم، جمله عمومی، همان

$$u_{n-1} = n \quad (n > 1)$$

است، ولی می بینید که با شرط $n > 1$ همراه است. در این جا، به ازای $n = 2$ ، جمله اول و به ازای $n = 7$ ، جمله ششم دنباله به دست می آید، به همین مناسبت آن را با u_{n-1} نشان دادیم: u_n همیشه معرف جمله n ام است.

* یادداشت ۲. ما پاسخی برای مساله خودمان پیدا کردیم، ولی می توان پاسخ های دیگری هم برای این مساله پیدا کرد. در واقع، این مساله، بی نهایت جواب دارد. در یادداشت ۱ گفتیم، جمله های پشت سرهم یک دنباله را می توان، با در دست داشتن جمله عمومی آن، پیدا کرد. دنباله ای را در نظر بگیرید که جمله عمومی آن، چنین باشد:

$$u_{n-1} = (n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7) + n$$

$$(n \geq 2)$$

اگر تنها به این نکته توجه داشته باشید که، حاصل ضرب هر عددی در صفر، برابر صفر است، آن وقت اگر به جای n ، به ترتیب، عددهای ۲، ۳، ۴، ...، ۱۰ را قرار دهیم، ۹ جمله اول دنباله به دست می آید که چنین اند:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 728, 5049, 25210$$

بنابراین، می‌توان، برای پاسخ به مساله، این سه عدد را نام برد:

$$۷۲۸, ۵۰۴۹, ۲۵۲۱۰$$

و اگر جمله عمومی را، به صورت

$$u_{n-1} = \frac{1}{720}(n-2)(n-3)\dots(n-7) + n$$

در نظر بگیریم، شش جمله اول دنباله، همان $(n > 1)$ عددهای مساله، یعنی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ به دست می‌آید و سه جمله بعد از آن‌ها چنین‌اند:

$$۹, ۱۶, ۴۵$$

خودتان می‌توانید جمله‌های عمومی دیگری برای دنباله در نظر بگیرید، به نحوی که شش جمله نخست آن، همان شش عدد مفروض باشد، ولی برای سه جمله بعد، عددهای دیگری به دست آید.

برای ۱۱ دنباله بعدی هم، تلاش کنید، جمله عمومی را بنویسید. آیا جمله عمومی وجود دارد؟ آیا این جمله عمومی یگانه است؟ اثر مساله، پاسخ‌های دیگری هم دارد، برخی از آن‌ها را پیدا کنید.

(۲) پاسخ: ۴، ۳ و ۲.

(۳) پاسخ: ۳۵، ۴۰ و ۴۵.

(۴) پاسخ: ۳، ۱ و ۱.

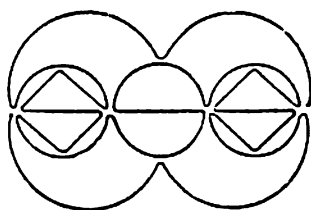
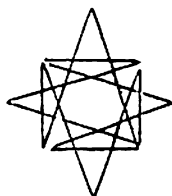
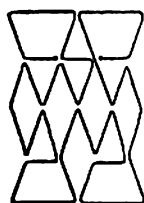
(۵) پاسخ: ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶.

(۶) پاسخ: ۶، ۳ و ۱.

(۷) پاسخ: $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$.

(۸) پاسخ: ۲۴، ۳۱ و ۳۹.

(۹) پاسخ: ۱۲، ۱۹ و ۱۱.



شکل ۲۵

(۱۰) پاسخ: ۷۸، ۷۶، ۳۸.

(۱۱) پاسخ: (دنباله عددهای اول): ۱۷، ۱۹ و ۲۳.

(۱۲) پاسخ: ۳۹، ۳۱ و ۴۱.

یادداشت. به جز ۲، بقیه عددهای اول، عددهایی فردند. در دنباله عددهای اول، «دوقلوهای» وجود دارد، یعنی عددهای فرد پشت سرهم که هردوی آنها، عددهایی اول اند. مثل

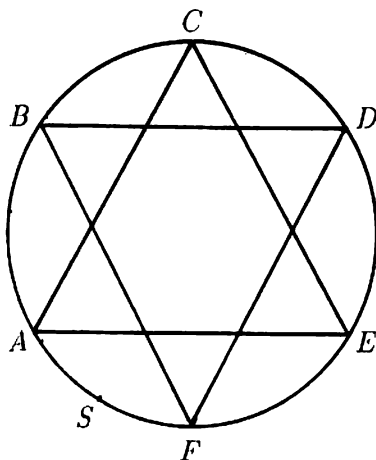
$(3, 5); (11, 13); (17, 19); (29, 31);$

$(41, 43); (59, 61); (71, 73); (101, 103); \dots$

در اینجا، در هر پرانتز دو عدد اول پشت سرهم گذاشته شده که، در ضمن، دو عدد فرد پشت سرهم اند. یعنی، در هر پرانتز، یک «دوقلوی اول» نوشته شده است.

۴. پاسخ را در شکل ۲۵ می بینید.

*یادداشت. با استدلالی ظریف، می توان پیش از تلاش برای حل مساله هایی از این گونه، متوجه شد، آیا مساله جواب دارد یا بدون جواب است؟ یعنی، آیا با یک حرکت قلم، می توان آن را رسم کرد یا نه؟ ابتدا دو تعریف را می پذیریم. اگر نقطه ای را که، در آن، چند خط (مستقیم یا منحنی) به هم رسیده اند، گره بنامیم، آن وقت، در شکل هایی نظیر



شکل ۲۶

شکل‌های مسأله ۴، با دونوع گره ممکن است برخورد کنیم: (۱) گرهی که از آن، به تعداد زوج خط خارج شده‌است (گره‌های زوج) و (۲) گره‌هایی که تعداد خط‌های خارج‌شده از آن، فرد است (گره‌های فرد).

اکنون، این حکم را ثابت می‌کنیم:

هر شکلی را که همه گره‌های آن زوج باشد و یا، به‌جز گره‌های زوج، تنها دو گره فرد داشته‌باشد، می‌توان با یک حرکت قلم رسم کرد.

در مسأله ۴، همه گره‌ها در دوشکل سمت چپ زوج‌اند و شکل سمت راست، تنها دو گره فرد دارد (دو نقطه انتهایی سمت چپ و سمت راست)؛ به‌همین مناسبت، همه آن‌ها را می‌توان بایک حرکت قلم رسم کرد.

درحالتی که تنها با گره‌های زوج سروکار داریم، می‌توان از هر نقطه دلخواه شکل آغاز کرد و بعد از پیمودن تمامی شکل، به نقطه آغاز حرکت رسید. ولی توجه کنید: این حرکت را نمی‌توان به دلخواه انجام داد. مثلاً شکل ۲۶ را درنظر بگیریم. در این‌جا، همه گره‌ها، زوج است (از هر نقطه برخورد، چهار خط خارج شده‌است). فرض کنید، از نقطه S آغاز کرده‌باشیم.

اگر در آغاز حرکت، دایره را دور بزنی و خود را دوباره به S برسانیم، مواجه با بن‌بست می‌شویم. ولی اگر، ضمن دور زدن دایره، در یکی از گره‌ها، روی محیط یکی از مثلث‌ها حرکت کنیم و، بعد از آن که دوباره به این گره رسیدیم، باز هم بخشی از دایره را دور بزنی و، سپس، روی محیط مثلث دوم حرکت کنیم و، سرانجام، بقیه محیط دایره را دور بزنی، راه‌حل پیدا می‌شود. مثلاً می‌توان، روی شکل ۲۶ این مسیر را انتخاب کرد:

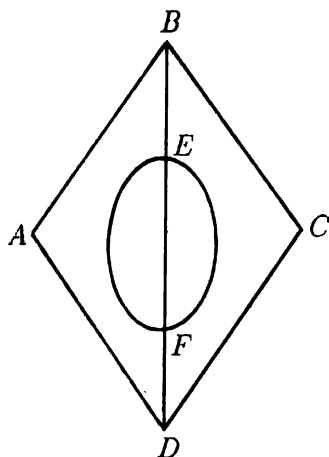
$$\widehat{SAB} \Rightarrow \overline{BF} \Rightarrow \overline{FD} \Rightarrow \overline{DB} \Rightarrow \\ \Rightarrow \widehat{BCDE} \Rightarrow \overline{EA} \Rightarrow \overline{AC} \Rightarrow \overline{CE} \Rightarrow EFS$$

همین مثال، روشن می‌کند که، با آغاز از نقطه‌ای مثل S ، دوباره در پایان کار به همان نقطه آغاز حرکت برمی‌گردیم؛ در ضمن، مسیر منحصر به فرد نیست و می‌توان مسیرهای متفاوتی به دست آورد (اگر روی شکل، از نقطه S آغاز کنیم، چند مسیر برای حرکت وجود دارد؟ آیا می‌توانید، تعداد این مسیرها، یعنی تعداد جواب‌ها را پیدا کنید؟).

دلیل اصلی قابل‌حل بودن شکل‌های با گره‌های زوج، این است که وقتی روی یک خط به گرهی می‌رسیم، ناچاریم روی خط دیگری از گره خارج شویم و، به این ترتیب، دو واحد از تعداد خط‌های مربوط به این گره کم می‌شود تا، سرانجام، تعداد آن‌ها به صفر برسد.

اکنون به حالتی می‌پردازیم که، به جز گره‌های زوج، تنها دو گره فرد داشته باشد. شکل ۲۷ از این گونه است: در نقطه‌های A و C دو خط و در نقطه‌های E و F چهار خط به هم رسیده‌اند؛ بنابراین، A و C ، E و F گره‌های زوج‌اند. و در هریک از نقطه‌های B و D سه خط به هم رسیده‌اند (دو گره B و D ، فردند).

اگر از یکی از گره‌های فرد، و مثلاً B ، آغاز کنیم و مسیر ACD را بپیماییم، مساله حل می‌شود؛ زیرا اگر مسیر ACD را از شکل حذف کنیم،



شکل ۲۷

بقیه شکل، تنها با گره‌های زوج سروکار دارد و، بنابراین، با آغاز از نقطه D می‌توان (مثل حالت اول)، با حرکت یک قلم، همه خط‌های شکل را پیمود و دوباره به D رسید.

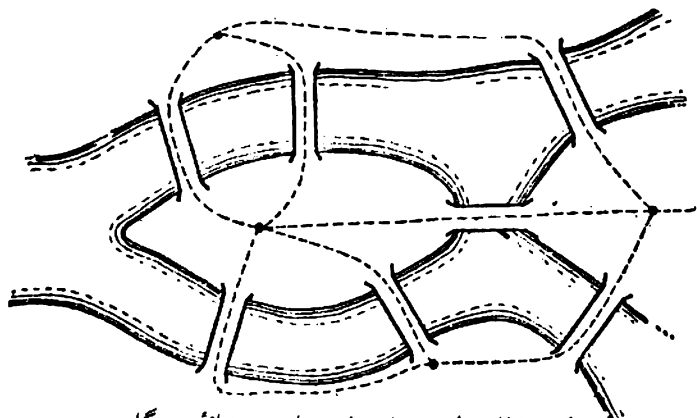
در این حالت، به دو نکته توجه کنیم. از نقطه B آغاز کردیم و در نقطه D به پایان رسم رسیدیم. یعنی در این حالت، باید از یک گره فرد آغاز کرد و در گره فرد دوم، رسم را تمام کرد (برخلاف حالت گره‌های زوج، که می‌توانستیم از نقطه دلخواهی آغاز کنیم و، سرانجام، خود را به همان نقطه برسانیم).

نکته دوم این‌که، مسیر نخستین را باید طوری انتخاب کرد که، بعد از رسیدن به گره فرد دوم، بخشی از شکل جدا شود و بقیه آن، شکل مستقلی باشد.

مثلاً، اگر مسیر نخستین را روی خط راست $BEFD$ می‌گرفتیم، به بن‌بست می‌رسیدیم و مساله حل نمی‌شد.

محاسبه کنید، در شکل، با آغاز از نقطه B ، چند مسیر وجود دارد که حل مساله را به پایان برساند؟

در همین جا یادآوری می‌کنیم، اگر شکل، دارای چهار گره فرد باشد، با



شکل ۲۸: طرحی از هفت پل رودخانه پره گل

دو حرکت قلم (ونه با یک حرکت) قابل رسم است.

اکنون تلاش کنید، مساله را در حالت کلی (یعنی وقتی دارای k گره زوج و m گره فرد باشد) تنظیم و، در حالت های مختلف، نوع جواب را مشخص کنید.

لئونارد اولر، ریاضی دان بزرگ سده هجدهم، در سال ۱۷۳۶ میلادی وقتی که سی ساله بود، مساله ای را طرح و حل کرد که به همین مساله «حرکت پیوسته روی شکل، بدون جدا کردن قلم از آن» مربوط می شود.

رودخانه پره گل که از شهر گنسبورگ واقع در روسیه می گذشت، هفت پل داشت که کرانه های رود را به هم وصل می کردند. مساله «اولر» چنین است: آیا می توان از هر هفت پل رودخانه پره گل و از هر کدام تنها یک بار عبور کرد؟

و اولر ثابت کرد: این مساله جواب ندارد (چرا؟).

۵. با این که، این مساله را، با علامت $\ast$ مشخص کرده ایم، نمی توان آن را جزو مساله های دشوار به حساب آورد. خواهید دید، با اندکی توجه، می توان کلید حل مساله را پیدا کرد.

بیشترین آگاهی در آن جا داده شده است که از ضرب یک عدد یک رقمی

(رقم سمت چپ در خارج قسمت) در یک عدد دورقمی (عدد مقسوم علیه)، عددی بصورت (*۷۷) به دست آمده است:

$$\begin{array}{r} * \quad * \quad \times \\ * \\ \hline *77 \end{array} \quad (1)$$

اگر عددهای یک رقمی (از ۰ تا ۹) را در نظر بگیریم، تنها از ضرب دو عدد ۳ و ۹ و یا از ضرب دو عدد ۱ و ۷، به عددی می‌رسیم که به ۷ ختم شده است. ولی ۱ و ۷ را باید کنار بگذاریم، زیرا اگر جمله دوم ضرب (۱) را برابر ۱ بگیریم، حاصل ضرب دورقمی می‌شود، نه سه رقمی، و اگر جمله دوم ضرب (۱) را ۷ بگیریم، جمله اول ضرب باید برابر ۱۱ باشد، ولی باز هم در این صورت حاصل ضرب دورقمی می‌شود.

بنابراین، ضرب (۱)، به یکی از این دو صورت است:

$$\begin{array}{r} * \quad 9 \quad \times \\ 3 \\ \hline *77 \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{r} * \quad 3 \quad \times \\ 9 \\ \hline *77 \end{array}$$

و برای این که حاصل ضرب به ۷۷ ختم شود، باید به این صورت باشند:

$$\begin{array}{r} 59 \times \\ 3 \\ \hline 177 \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{r} 53 \times \\ 9 \\ \hline 477 \end{array}$$

ولی اگر مقسوم علیه را برابر ۵۹ بگیریم، آن وقت، از ضرب رقم دوم خارج قسمت (یعنی ۷) در آن، به عدد ۴۱۳ می‌رسیم، در حالی که بنا بر فرض مساله، این حاصل ضرب باید به صورت

۷

باشد. در نتیجه، مقسوم علیه برابر ۵۳ و رقم سمت چپ خارج قسمت، برابر ۹ می شود.

از ضرب رقم سمت راست خارج قسمت در مقسوم علیه (یعنی ۵۳) باید عدد دورقمی به دست آید؛ و این، ممکن نیست مگر این که رقم سمت راست خارج قسمت برابر واحد باشد.

و به این ترتیب، تقسیم مشخص می شود:

$$\begin{array}{r}
 51463 \quad | \quad 53 \\
 477 \quad \quad | \quad 971 \\
 \hline
 376 \\
 371 \\
 \hline
 53 \\
 53 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

اکنون خودتان، انی دو ضرب را تکمیل کنید (با استدلال منطقی):

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \quad * \quad * \quad \times \\
 3 \quad * \quad * \\
 \hline
 5 \quad * \quad * \\
 * \quad 4 \quad * \\
 * \quad * \quad 3 \\
 \hline
 * \quad * \quad * \quad * \quad *
 \end{array}
 \quad || \quad
 \begin{array}{r}
 6 \quad * \quad * \quad \times \\
 * \quad * \quad * \\
 \hline
 * \quad * \quad * \\
 * \quad * \quad * \quad * \\
 * \quad 5 \quad * \quad 5 \\
 \hline
 * \quad * \quad 5 \quad * \quad 4 \quad *
 \end{array}
 \end{array}$$

(در بین رقم های ضرب سمت چپ، رقم ۷ وجود ندارد و در ضرب سمت راست، به جز آن چه در صورت مساله داده شده است، باز هم رقم های ۴، ۵ و ۶ وجود دارد).

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 2 \ 8 \ 1 \times \\
 3 \ 3 \ 2 \\
 \hline
 5 \ 6 \ 2 \\
 8 \ 4 \ 3 \\
 8 \ 4 \ 3 \\
 \hline
 9 \ 3 \ 2 \ 9 \ 2
 \end{array}
 \quad \parallel \quad
 \begin{array}{r}
 6 \ 4 \ 5 \times \\
 7 \ 2 \ 1 \\
 \hline
 6 \ 4 \ 5 \\
 1 \ 2 \ 9 \ 0 \\
 4 \ 5 \ 1 \ 5 \\
 \hline
 4 \ 6 \ 5 \ 0 \ 4 \ 5
 \end{array}
 \end{array}$$

۶. اگر عدد مجهول، برابر واحد باشد، مجموع دو عدد دیگر برابر ۴ و مجموع سه عدد برابر ۵ می‌شود. به این ترتیب، باید مجموع سه عدد، یعنی p^p ، بر ۵ بخش پذیر باشد و عدد مجهول، برابر $\frac{1}{5}$ این مجموع است. ولی بنابه فرض، p عددی است اول و، بنابراین، عدد

$$p^p = p \times p \times p \times \dots$$

وقتی بر ۵ بخش پذیر است که داشته باشیم: $p = 5$. پس، مجموع سه عدد برابر

$$5^5 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$$

و عدد مجهول چنین می‌شود:

$$\frac{1}{5} \times 3125 = 625$$

۷. در بسیاری موردها، برای پیدا کردن یک یا چند عدد، باید به جست‌وجو پرداخت؛ عددهایی را که می‌توانند جواب باشند، مورد آزمایش قرار داد که، در نتیجه، یا جواب مورد نظر پیدا می‌شود و یا روشن می‌شود که مساله جواب ندارد.

ولی این جست‌وجو، نباید همراه با ناآگاهی و به اصطلاح «کور» باشد. وقتی چیزی را گم کرده‌اید، تمام شهر یا محله و یا سراسر منزل خود را مورد

جست‌وجو قرار نمی‌دهید، بلکه می‌اندیشید که احتمال وجود این چیز در کجاها می‌تواند باشد؛ یعنی در آغاز، محدودهٔ مورد جست‌وجو را تنگ و تنگ‌تر می‌کنید و، سپس، به دنبال آن‌چه موردنظرتان است، می‌روید.

به مسألهٔ خودمان برمی‌گردیم. درآغاز، نمی‌دانیم، آیا این مساله جواب دارد یا نه! البته می‌توان، عددهای طبیعی را از عدد ۱ درنظر گرفت و، برای هر عدد، مجذور و مکعب آن را پیدا کرد تا، اگر مساله جواب داشته‌باشد، به آن برسیم. ولی این، همان «روش کور» است و به‌جز وقت زیادی که از ما می‌گیرد و، به‌دلیل «کور بودن» و «طولانی بودن» خود، کسالت‌آور و خسته‌کننده است (و چه‌بسا، ما را از ادامه کار منصرف کند)، روشن نیست درکجا باید جست‌وجو را قطع کرد!

صورت مساله و شرط‌های آن را، با دقت مرور کنیم. دو عدد، روی هم ۱۰ رقم دارند... آیا ممکن است، این دو عدد، یکی مجذور و دیگری مکعب یک عدد سه‌رقمی باشند؟ کوچکترین عدد سه‌رقمی برابر است با ۱۰۰ و داریم:

$$۱۰۰^۲ = ۱۰۰۰۰;$$

$$۱۰۰^۳ = ۱۰۰۰۰۰۰$$

مجذور ۱۰۰، عدد ۵رقمی و مکعب آن عدد ۷رقمی است، روی هم ۱۲ رقم. ولی ما بیش از ۱۰ رقم نداریم. اما

$$۹۹^۲ = ۹۸۰۱ \quad (\text{چهار رقم});$$

$$۹۹^۳ = ۹۷۰۲۹۹ \quad (\text{شش رقم})$$

بنابراین، عددی که مجذور و مکعب آن، روی هم ۱۰ رقم داشته‌باشد، دورقمی است (البته، کنار گذاشتن عددهای یک‌رقمی، امری روشن است).

آیا همهٔ عددهای دورقمی را مورد آزمایش قرار دهیم؟ نه! مثلاً

$$۴۵^۲ = ۲۰۲۵ \quad (\text{چهار رقم});$$

$$۴۵^۳ = ۹۱۱۲۵ \quad (\text{پنج رقم})$$

دو عدد، روی هم، ۹ رقم دارند. درواقع، نخستین عدد دورقمی که مجذور و مکعب آن، روی هم ۱۰ رقم دارند، عدد ۴۷ است:

$$۴۷^۲ = ۲۲۰۹ \quad (\text{چهار رقم});$$

$$۴۷^۳ = ۱۰۳۸۲۳ \quad (\text{شش رقم})$$

به این ترتیب، تنها باید عددهای از ۴۷ تا ۹۹ را مورد آزمایش قرار داد. درضمن، معلوم شد، خود عددهای ۴۷ و ۹۹ را هم باید کنار گذاشت، زیرا مجذور و مکعب آنها، از همهٔ رقم‌ها استفاده نشده است و در آنها، رقم‌های تکراری هم وجود دارد. تنها ۵۱ عدد برای آزمایش، باقی می ماند:

$$۴۸, ۴۹, ۵۰, \dots, ۹۸$$

باز هم دقت کنیم. شاید بتوانیم تعداد آنها را کمتر کنیم. چهار نوع عدد وجود دارد که رقم سمت راست مجذور و مکعب آنها، یکی است: عددهایی که به ۰، ۱، ۵ یا ۶ ختم شوند. مثلاً

$$۵۵^۲ = ۳۰۲۵;$$

$$۵۵^۳ = ۱۶۶۳۷۵$$

بنابراین، دست کم رقم آخر آنها، تکراری است. این عددها را هم کنار می گذاریم. در بین عددهای از ۴۸ تا ۹۸، پنج عدد به ۰، پنج عدد به ۱، پنج عدد به ۵ و پنج عدد به ۶ ختم می شوند، روی هم ۲۰ عدد. اگر این ۲۰ عدد را هم از محدودهٔ آزمایش خود خارج کنیم، ۳۱ عدد می ماند.

ضمن آزمایش، اگر در مجذور عدد، رقم تکراری وجود داشته باشد، لزومی ندارد، مکعب آنرا هم، به دست بیاوریم. مثلاً

$$56^2 = 3136$$

که در آن، رقم ۳ تکرار شده است و، بنابراین، با شرط مساله سازگار نیست. در ضمن، لازم نمی شود، همه این عددها را آزمایش کنیم، زیرا وقتی به عدد ۶۹ برسیم، به دست می آید:

$$69^2 = 4761$$

$$69^3 = 328509$$

که با همه شرط های مساله می سازد. بنابراین پاسخ مساله، این دو عدد است:

$$4761 \text{ و } 328509$$

البته، اگر بخواهیم ثابت کنیم که: مساله پاسخ دیگری ندارد، باید عددهای از ۷۲ تا ۹۸ را هم مورد آزمایش قرار دهیم.

۸. این، از آن مساله هایی است که هیچ قاعده و قانونی، برای پیدا کردن جواب نمی توان پیدا کرد. تنها پی گیری، تلاش و حوصله می تواند ما را به نتیجه برساند. در این جا برای هر حالت یک جواب داده شده است:

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100;$$

$$98 - 76 + 54 + 3 + 21 = 100$$

$$9. \text{ پاسخ: } (a; 1; b; 5; c) 0$$

$$10. \text{ پاسخ: } 13 + 169 + 281 + 461 + 76 = 1000$$

۱۱. بلافاصله روشن می شود که چلنگر، نه بهروز است و نه سروش، زیرا بهروز خواهر دارد و سروش، در بین سه نفر از همه کوچکتر نیست.

بنابراین، چلنگر، همان مزدک است. سروش، نمی‌تواند تراشکار باشد؛ چون در صورت مساله گفته شده‌است: «سروش از تراش‌کار، بزرگتر است». بنابراین، سروش، همان جوش‌کار است.

پاسخ: بهروز: تراش‌کار؛ مزدک، چلنگر؛ سروش: جوش‌کار.

۱۲. این مساله و مساله قبل، در گروه مساله‌هایی قرار دادند که، به آن‌ها، مساله‌های منطقی می‌گویند و، به نظر من، هر دانش‌آموزی باید به آن‌ها پردازد. درواقع، هر انسانی در هر گام، با «مساله‌هایی» - گاه ساده و گاه دشوار - مواجه می‌شود که باید آن‌ها را به صورتی «معقول» و «منطقی» حل کند، و اگر به «استدلال و داوری منطقی» عادت نکرده باشد، نمی‌تواند مسیر درست زندگی خود را پیدا کند.

حل «مساله‌های منطقی»، گرچه به ظاهر، ربطی به ریاضیات ندارد، ولی درواقع، موجب تقویت اندیشه و بارور شدن استدلال ذهنی (برپایه واقعیت‌ها) می‌شود، و این همان چیزی است که در ریاضیات، به آن نیازمندیم.

مساله‌های منطقی با «چیستان‌ها» از این جهت اختلاف دارند که، در آن‌ها، نه بازی با واژه‌ها وجود دارد و نه تلاشی برای گمراه کردن خواننده است. همچنین، مساله‌های منطقی با مساله‌های ریاضی این تفاوت را دارند که، در آن‌ها، نیازی به هیچ‌گونه آگاهی از درس‌ها، مفهوم‌ها و قضیه‌های ریاضی نیست.

در مساله‌های منطقی، تنها از حکم‌هایی استفاده می‌شود که برای همه کس، روشن و بدیهی‌اند، مثل: پدر از پسر خود بزرگتر است؛ در تیم والیبال، یا همه مردند یا همه زن، سرهنگ بزرگتر از سرگرد است و غیره.

بهترین و مناسب‌ترین روش، برای حل مساله‌های منطقی (که البته، تنها روش حل این‌گونه مساله‌ها نیست)، عبارت‌است از تنظیم جدولی که، در آن بتوان همه حالت‌های ممکن را نشان داد. مثلاً، برای مساله ۱۲؛ این جدول

	بالرین	نقاش	خواننده	نویسنده
توکا				
مژده				
سهراب				
رامین				

اگر مثلاً متوجه شدیم که، مژده، نمی‌تواند بالرین باشد، آن وقت در جدول، در سطر جلو مژده و در ستون زیر بالرین، نشانه «منفی (-)» می‌گذاریم. یا اگر به این نتیجه رسیدیم که توکا، همان نقاش است، جلو نام توکا و در ستون نقاش، علامت مثبت (+) می‌گذاریم. وقتی تمامی جدول به همین صورت نشانه‌گذاری شود و در برابر هر نام، تنها یک نشانه «مثبت» وجود داشته باشد، آن وقت مساله به طور کامل حل شده است.

اکنون به حل مسأله ۱۲ می‌پردازیم.

از شرط اول معلوم می‌شود که، توکا و سهراب، هیچ کدام خواننده نیستند. بنابراین، می‌توانیم، در خانه‌های مربوط، نشانه منفی بگذاریم. از شرط دوم متوجه می‌شویم، مژده نه نقاش است و نه نویسنده، و از شرط سوم می‌فهمیم، رامین و توکا نویسنده نیستند. اگر نشانه‌های «منفی» را در جای خود قرار دهیم، جدول به این صورت درمی‌آید.

	بالرین	نقاش	خواننده	نویسنده
توکا			—	—
مژده		—		—
سهراب			—	
رامین				—

تا همین جا، معلوم می‌شود که سهراب، نویسنده است (این روش را، روش حذف می‌گویند، با روش حذف به نویسنده بودن سهراب پی بردیم). جلو نام

سهراب و زیر ستون نویسنده، نشانه «مثبت» و زیر سه ستون دیگر (بالرین، نقاش و خواننده) نشانه «منفی» می‌گذاریم.

اکنون، شرط‌های ۲ و ۴ را باهم مقایسه می‌کنیم: سهراب به دیدار نقاش، رفته‌است، درضمن، توکا، سهراب را نمی‌شناسد. یعنی توکا، نقاش نیست و پیش‌از این دیدیم که توکا، نه خواننده است و نه نویسنده. بنابراین، تنها یک حالت باقی می‌ماند: توکا، بالرین است. نشانه «مثبت» را در خانه موردنظر می‌گذاریم. دراین صورت مژده و رامین، نمی‌توانند بالرین باشند. پس مژده خواننده است. و سرانجام، رامین، تنها می‌تواند نقاش باشد. مساله، به‌طور کامل، حل شد.

۱. مجموعه‌ها

۱۳. الف) مجموعه عددهای یک‌رقمی (به‌عنوان مثال):

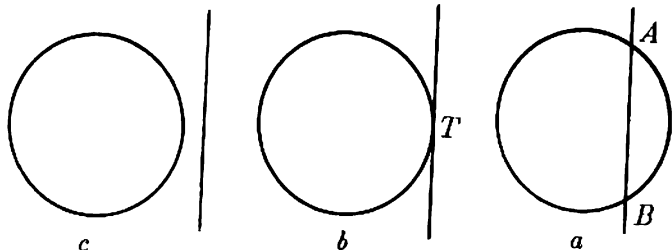
$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ب) مثلاً، مجموعه قمرهای طبیعی مریخ. مریخ تنها دو قمر طبیعی دارد: فوبوس و دی‌موس. یا مجموعه عددهای یک‌رقمی غیرصفر و بخش‌پذیر بر ۴:

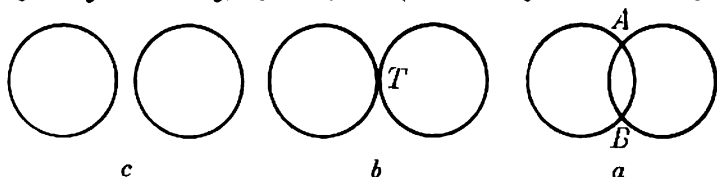
$$\{4, 8\}$$

ت) مثلاً مجموعه قمرهای طبیعی زمین؛ زمین تنها یک قمر طبیعی دارد: ماه؛ مجموعه عددهای اول بین دو عدد ۸۹ و ۱۰۱؛ $\{97\}$ ؛ ۹۷ تنها عدد اول بین ۸۹ و ۱۰۱ است.

ث) هر مجموعه تهی، مثل مجموعه عددهای اول بین ۱۱۳ و ۱۲۷ (بین این دو عدد، هیچ عدد اولی وجود ندارد)؛ یا مجموعه پزشکان ۳ ساله؛ یا مجموعه اتومبیل‌های یک چرخ، یا مجموعه مثلث‌های چهار زاویه.



شکل ۲۹: (a) خط راست و دایره، دو نقطه مشترک دارند (b) خط راست و دایره، یک نقطه مشترک دارند (c) خط راست و دایره، دو نقطه مشترک ندارند



شکل ۳۰: (a) دایره‌ها، دو نقطه مشترک دارند (b) دایره‌ها، یک نقطه مشترک دارند (c) دایره‌ها، دو نقطه مشترک ندارند

۱۴. این مجموعه می‌تواند دو عضو داشته‌باشد (وقتی خط راست، دایره را قطع می‌کند) یا یک عضو (وقتی خط راست بر دایره مماس باشد) و می‌تواند مجموعه‌ای تهی باشد (وقتی خط راست در بیرون دایره باشد). سه حالت را در شکل ۲۹ می‌بینید.

۱۵. دو دایره می‌توانند دو نقطه یا یک نقطه مشترک داشته‌باشند و یا نقطه مشترکی نداشته‌باشند (شکل ۳۰)

یادداشت. در بیان موضوع‌هایی که به ریاضیات مربوط می‌شوند، از جمله‌های مبهم یا جمله‌هایی که تردید ایجاد می‌کند، پرهیز کنید. بهتر است، برای خط راست و دایره یا دو دایره، از واژه «نقطه‌های مشترک» استفاده کنید، زیرا معمولاً در حالت مماس بودن خط راست بر دایره یا مماس بودن دو دایره برهم، نمی‌گویند «نقطه برخورد». «نقطه برخورد» یا «نقطه تقاطع» را برای حالت a (در شکل‌های ۲۹ و ۳۰) به کار ببرید و برای حالت b (شکل‌های ۲۹ و ۳۰) از واژه «نقطه مشترک» یا «نقطه تماس» استفاده کنید.



شکل ۳۱: (a) خط‌های راست، یک نقطه برخورد دارند (b) خط‌های راست، نقطه برخوردی ندارند

۱۶. یک یا هیچ (شکل ۳۱).

۱۷. نه! مجموعه تهی با مجموعه $\{0\}$ فرق دارد.

$$\phi \neq \{0\}$$

مجموعه تهی عضوی ندارد، درحالی‌که مجموعه $\{0\}$ یک مجموعه یکانی است، یعنی دارای یک عضو (عدد صفر) است.

۱۸. بله. ۱ یک عدد است، درحالی‌که $\{1\}$ ، یک مجموعه است. ۱ عضو مجموعه $\{1\}$ است.

۱۹. معمولاً، و به‌ویژه در ریاضیات، یک مجموعه نمی‌تواند عضو خودش باشد:

مجموعه مربع‌ها، خودش مربع نیست؛

مجموعه عددهای طبیعی، خودش یک عدد نیست و ...

ولی مثلاً می‌توان این مجموعه را درنظر گرفت:

«مجموعه همه مجموعه‌ها»

اگر «مجموعه همه مجموعه‌ها» را A بنامیم، به‌ظاهر A می‌تواند عضو خودش باشد، زیرا A هم یک مجموعه است. ولی برتراند راسل، ریاضی‌دان و فیلسوف انگلیسی، ثابت کرد که درهرحال (چه A را عضو خودش بدانیم و چه A را عضو خودش ندانیم)، ازنظر منطقی دچار تناقض می‌شویم.

... در این جا، از بحث تفصیلی در این باره می‌گذریم، چرا که در ریاضیات، با مجموعه‌هایی کار می‌کنیم که کاملاً معین‌اند، عضو خودشان نیستند و، بنابراین، ضمن عمل با آن‌ها، دچار تناقض نمی‌شویم. اکنون خودتان، به این پرسش پاسخ دهید.

چرا ϕ با $\{\phi\}$ فرق دارد و چرا $\{\phi\}$ عضو خودش نیست؟

۲۵. الف) چون $1 = \frac{1+4}{10-5}$ و $2 = \frac{4}{2}$ ، دو مجموعه برابرند، ب) بله، برابرند، پ) بله، ت) نه! اگر مجموعه عددهای بخش‌پذیر بر ۴ و ۶ را، A و مجموعه عددهای بخش‌پذیر بر ۲۴ را B بنامیم، داریم:

$$A = \{12, 24, 36, 48, 60, \dots\}$$

$$B = \{24, 48, 72, \dots\}$$

می‌بینیم که A نسبت به B ، پرعضوتر است و شامل عضوهایی است که عضو مجموعه B نیستند. بنابراین، مجموعه‌های A و B برابر نیستند.

* یادداشت. اگر عدد m بر دو عدد a و b بخش‌پذیر باشد، به شرطی بر حاصل ضرب ab بخش‌پذیر است که a و b نسبت به هم اول باشند (یعنی مقسوم علیه مشترکی نداشته باشند؛ به زبان دیگر، هر دو عدد a و b ، به جز ۱، بر هیچ عدد دیگری، با هم بخش‌پذیر نباشند). مثلاً اگر عددی بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد، بر ۶ بخش‌پذیر است؛ یا عدد بخش‌پذیر بر ۳ و ۴ بر ۱۲؛ و عدد بخش‌پذیر بر ۱۴ و ۲۵ بر ۳۵۰ بخش‌پذیر است.

۴ و ۶ نسبت به هم اول نیستند (هردوی آن‌ها، بر ۲ بخش‌پذیرند)، بنابراین اگر عددی هم بر ۴ و هم بر ۶ بخش‌پذیر باشد، ممکن است بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد.

ث) نه! در مجموعه نخست، عدد ۹۱ عددی اول نیست، زیرا

$$91 = 7 \times 13$$

ج) بله. هردو، مجموعه‌هایی تهی‌اند.

چ) بله، زیرا

$$0/35 = \frac{7}{20} = \frac{1/75}{5}$$

۲۱. نه، زیرا $0/25$ و $\frac{1}{4}$ دو عضو مختلف نیستند.

۲۲. اگر صورت کسر را برابر واحد بگیریم، ۸ کسر با شرط‌های مساله

به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$$

با صورت برابر ۲، ۴ کسر (مخرج باید از صورت بزرگتر باشد و، درضمن،

زوج هم نباشد):

$$\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$$

و به‌همین‌ترتیب، ۴ کسر با صورت برابر ۳:

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}$$

سه کسر، را صورت برابر ۴

$$\frac{4}{5}, \frac{4}{7}, \frac{4}{9}$$

چهار کسر با صورت برابر ۵

$$\frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}$$

یک کسر با صورت برابر ۶: $\frac{6}{7}$ ؛ دو کسر با صورت برابر ۷: $\frac{7}{8}$ و

$\frac{7}{9}$ و سرانجام یک کسر با صورت برابر ۸: $\frac{8}{9}$.

روی هم ۲۷ کسر. مجموعه ما دارای ۲۷ عضو است. در اینجا،
 عضوهای مجموعه را، به ترتیب صعودی، از چپ به راست نوشته ایم:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 4 \\ \hline 9' & 8' & 7' & 6' & 5' & 4' & 3' & 2' & 1' & 8' & 7' & 6' & 5' & 4' & 3' & 2' & 1' \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 5' & 8' & 3' & 7' & 9' & 4' & 5' & 6' & 7' & 8' & 9' \end{array}$$

یادداشت. می دانید، از بین دو کسر با مخرج های برابر، کسری کوچکتر است که صورت کوچکتر داشته باشد؛ از بین دو کسر با صورت های برابر، کسری کوچکتر است که مخرج بزرگتر داشته باشد؛ در ضمن می توانیم دو کسر غیر مشخص را به یک صورت، یا به یک مخرج تبدیل کنیم. مثلاً برای دو کسر $\frac{2}{5}$ و $\frac{3}{7}$ ؛ اگر صورت و مخرج کسر اول را بر ۲ و صورت و مخرج کسر دوم را بر ۳ تقسیم کنیم، به دست می آید:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{2/5} \text{ و } \frac{3}{7} = \frac{1}{2/33}$$

چون $\frac{2}{5}$ از $\frac{2}{33}$ بزرگتر است، پس $\frac{2}{5}$ از $\frac{3}{7}$ کوچکتر است.
 همچنین می توانستیم، صورت و مخرج کسر اول را در ۷ و صورت و مخرج کسر دوم را در ۵ ضرب کنیم:

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35} \text{ و } \frac{3}{7} = \frac{15}{35}$$

مخرج ها برابرند. چون ۱۴ از ۱۵ کوچکتر است، پس $\frac{2}{5}$ از $\frac{3}{7}$ کوچکتر است.

ولی برای مقایسه دو کسر، اغلب می توان از این قانون هم استفاده کرد:
 اگر به صورت و مخرج کسری، یک عدد اضافه کنیم، این کسر به واحد نزدیکتر می شود، یعنی اگر در آغاز از واحد کوچکتر باشد، بعد از اضافه

شدن یک عدد به صورت و مخرج آن، بزرگتر می شود و، برعکس، اگر در آغاز از واحد بزرگتر باشد، با اضافه کردن عددی به صورت و مخرج، کوچکتر می شود.

مثلاً، اگر بخواهیم این دو کسر را باهم مقایسه کنیم:

$$\frac{2457}{9743} \text{ و } \frac{24}{97}$$

روشن است، تبدیل این دو کسر به کسرهایی که مخرج های برابر داشته باشند، وقت زیادی می گیرد و کسالت آور است. این طور استدلال می کنیم:

$$۱) \quad \frac{24}{97} = \frac{2400}{9700}$$

(صورت و مخرج را، ۱۰۰ برابر کردیم.)

$$۲) \quad \frac{2443}{9743} > \frac{2400}{9700} = \frac{24}{97}$$

(کسر $\frac{2400}{9700}$ از واحد کوچکتر است، پس وقتی به صورت و مخرج آن، ۴۳ واحد اضافه کنیم، کسر بزرگتر می شود.)

$$۳) \quad \frac{2457}{9743} > \frac{2443}{9743}$$

(از دو کسر با مخرج های برابر، کسری بزرگتر است که صورت بزرگتر دارد.) اکنون از نتیجه های ۲ و ۳ به دست می آید:

$$\frac{2457}{9743} > \frac{2443}{9743} > \frac{24}{97}$$

یعنی کسر $\frac{2457}{9743}$ از کسر $\frac{24}{97}$ بزرگتر است.

۲۳. عضوهای این مجموعه را می‌توان عکس عضوهای مجموعه مساله ۲۲ دانست. ولی کسری که مخرج واحد داشته باشد، کسر نیست، بلکه عددی درست است.
۲۴. پاسخ:

$$A = \{7\}; \quad B = \{-2, 2\};$$

$$C = \{د, و, س, ت, ی\}$$

۲۵. A مجموعه‌ای تهی است، زیرا $x^2 + 1$ به ازای یک عدد حقیقی، نمی‌تواند برابر صفر شود: $A = \phi$.

$$B \text{ مجموعه تهی نیست و یک عضو دارد: } x = 0; B = \{0\}.$$

۲۶. الف) نادرست؛ $\{0\}$ یک مجموعه است و دربین عضوهای مجموعه $\{0, 1\}$ ، چنین مجموعه‌ای وجود ندارد. ب) نادرست؛ ϕ ، مجموعه تهی است و مجموعه تهی عضو مجموعه $\{0, 1\}$ نیست. پ) و ت) درست. ث) نادرست. ج) درست.

۲۷. $\{\{0, 1\}\}$ یک مجموعه یکانی است، یعنی تنها یک عضو دارد؛ این عضو خودش یک مجموعه است. مجموعه $\{0, 1\}$.

۲۸. الف) ب)، پ) و ت) نادرست؛ ث) درست و ج) نادرست.
۲۹. پاسخ: همه درست‌اند.

۳۰. بله. زیرا A یک مجموعه تهی است و مجموعه تهی، زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

۳۱. الف)، ب) و پ) درست‌اند؛ ج) نادرست است.
۳۲. پاسخ:

$$\phi;$$

$$\{1\}; \{2\}; \{3\};$$

$$\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\};$$

$$\{1, 2, 3\}$$

۳۳. پاسخ:

$$\phi;$$

$$\{x\}; \{y\}; \{z\};$$

$$\{x, y\}; \{x, z\}; \{y, z\};$$

$$\{x, y, z\}$$

۳۴. به دو صورت می توان نوشت (واژه «مجموعه» را تکرار نکرده ایم):

چهار ضلعی ها $\subset$ دوزنقه ها $\subset$ متوازی الاضلاع ها $\subset$ لوزی ها $\subset$ مربع ها

چهار ضلعی ها $\subset$ دوزنقه ها $\subset$ متوازی الاضلاع ها $\subset$ مستطیل ها $\subset$ مربع ها

۳۵. A یک مجموعه تهی است، زیرا از $\phi \subset A$ (فرض) و $\phi \subset A$

(ϕ زیر مجموعه هر مجموعه ای است) نتیجه می شود. $A = \phi$.

۳۶. پاسخ: $A \subset B$.

۳۷. اگر مجموعه عددهای طبیعی، یعنی مجموعه A را، مجموعه مادر

یا مرجع بگیریم، داریم:

$$B \subset A, C \subset A$$

در ضمن، نسبت به مجموعه مرجع A ، مجموعه B متمم مجموعه C و

مجموعه C متمم مجموعه B است. همچنین می توان نوشت:

$$C = A - B \text{ و } B = A - C$$

۳۸. برای حل این مساله، کافی است، به قضیه بسیار ساده‌ای توجه کنیم:

اگر یک عضو به عضوهای مجموعه‌ای اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن، دو برابر می‌شود.

درواقع، همه زیرمجموعه‌های مجموعه اول، زیرمجموعه‌های مجموعه دوم هم هستند، درضمن، اگر عضو جدید را به عضوهای هریک از زیرمجموعه‌های قبلی اضافه کنیم، باز هم زیرمجموعه‌هایی از مجموعه جدید به دست می‌آید و، به این ترتیب با اضافه کردن یک عضو به عضوهای مجموعه، تعداد زیرمجموعه‌های آن دو برابر می‌شود.

مجموعه یکانی (مجموعه‌ای که یک عضو دارد) دارای دو زیرمجموعه است: ϕ و خود مجموعه.

مجموعه‌ای که دو عضو داشته باشد، دارای 2×2 ، یعنی 2^2 یا ۴ زیرمجموعه است:

مجموعه تهی؛ دو مجموعه یک‌عضوی و یک مجموعه دو‌عضوی. به همین ترتیب، با توجه به قضیه بالا مجموعه سه‌عضوی دارای 2^3 ، یعنی 2^3 یا ۸ زیرمجموعه است؛

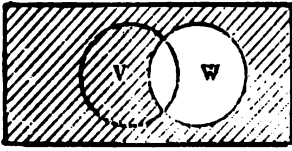
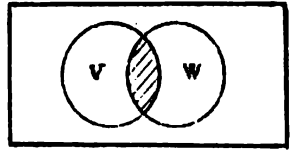
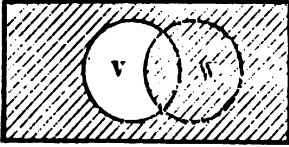
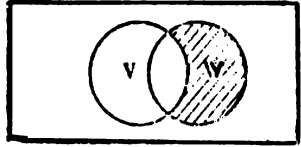
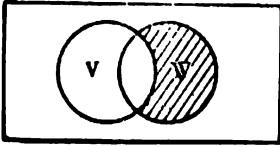
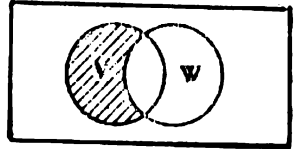
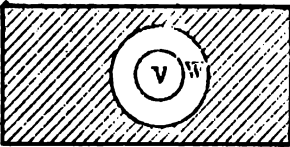
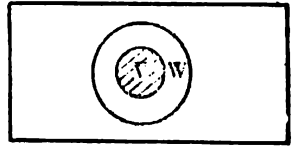
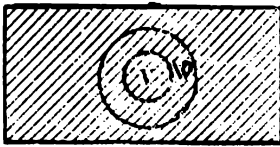
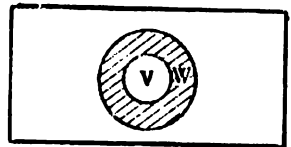
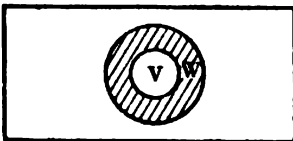
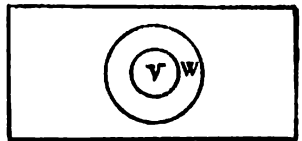
مجموعه چهارعضوی دارای 2^4 ، یعنی 2^4 یا ۱۶ زیرمجموعه است؛ و سرانجام، مجموعه n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه است.

۳۹. پاسخ را در شکل ۳۲ می‌بینید.
یعنی $F \subset M$ و $D \subset C \subset B \subset A \subset M$.

۲. عمل با مجموعه‌ها

۴۰. پاسخ: همه رابطه‌ها درست‌اند.

۴۱. از برابری $A \cup B = A$ نتیجه می‌شود که B باید زیرمجموعه‌ای از A باشد ($B \subset A$) و از $B \cup A = B$ نتیجه می‌شود: $A \subset B$ و،

 W'  $V \cap W$  $V' \cup W$  $W - V$  $V' - W'$  $V \cap W'$  W'  $V \cap W$  $V' \cup W$  $W - V$  $V' - W'$  $V \cap W'$

برای محاسبه Y ، اگر درآغاز، پرانتز $A \cap C'$ را کنار بگذاریم، داریم

$$(A \cap B' \cap C) \cup B = B \cup [B' \cap (A \cap C)] = \\ = B \cup (A \cap C);$$

اکنون پرانتزی را که کنار گذاشته بودیم، وارد می‌کنیم:

$$B \cup (A \cap C) \cup (A \cap C') = B \cup [A \cap (C \cup C')] = \\ = B \cup (A \cap M) = B \cup A$$

یعنی $Y = B \cup A$

۵۲. (۱) برای سادگی کار، به جای نمادهای $\cup$ و $\cap$ ، به ترتیب از نمادهای ساده جمع و ضرب استفاده می‌کنیم، یعنی $A \cup B$ را به صورت $A + B$ و $A \cap B$ را به صورت AB می‌نویسیم. در این صورت، عبارت Z ، چنین می‌شود:

$$Z = C(A' + B')(A + C') + A'BC + ABC'$$

ابتدا، جمله اول این عبارت را ساده می‌کنیم:

$$C(A' + B')(A + C') = (CA' + CB')(A + C') = \\ = AA'C + AB'C + CC'A' + CC'B' = \\ = \phi + AB'C + \phi + \phi = AB'C$$

بنابراین، عبارت‌ها چنین می‌شود:

$$Z = A'BC + AB'C + ABC' \quad (۱)$$

که با استفاده از نمادهای اصلی چنین می‌شود:

$$Z = (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A \cap B \cap C')$$

$$X = ABC + AB' + AC' + A' = A(BC + B' + C') + A'$$

ازطرف دیگر

$$BC + B' + C' = BC + B'C' = M$$

بنابراین

$$AM + A' = A + A' = M$$

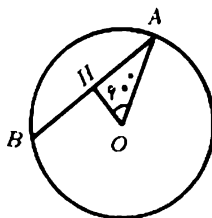
۵۵. پاسخ: ۶۰ درصد.

۵۶. راهنمایی. همیشه، مرکز مستطیل، یعنی نقطه برخورد قطرهای آن، روی مرکز دایره است؛ به جز این، می توان عرض مستطیل را به دلخواه کوچک گرفت، در این صورت، طول آن مرتباً بزرگتر و به طول قطر دایره نزدیک تر می شود. به این ترتیب، هر قطر دایره را می توان، مستطیلی به شمار آورد که عرض آن برابر صفر است.

پاسخ. اشتراک مستطیل ها، تنها نقطه O (مرکز دایره) است، ولی اجتماع آن ها، شامل تمامی دایره (O, R) (نقطه های محیط و درون آن) می شود.

۵۷. راهنمایی: اگر پاره خط AB را، وتر کمان ۱۲۰ درجه، (یعنی ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایره (O, R)) فرض کنیم و پاره خط راست OH عمود بر این وتر باشد، مثلث قائم الزاویه OHA در رأس A ، زاویه ای ۳۰ درجه پیدا می کند و، بنابراین، طول پاره خط راست OH برابر $\frac{1}{4}R$ می شود (شکل ۳۵).

پاسخ. اشتراک مجموعه این مثلث ها، عبارت از مجموعه نقطه های واقع بر محیط و درون دایره $(O, \frac{1}{4}R)$ و اجتماع آن ها، مجموعه نقطه های واقع بر محیط و درون خود دایره (O, R) .



شکل ۳۵

۵۸. این مجموعه‌ها، به زبان گسترشی، چنین‌اند:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\} \quad (\text{مجموعه‌ای بی‌پایان})$$

$$C = \{4, 5, 6, 7, \dots\} = B$$

$$D = \phi \quad (\text{بین ۴ و ۵ عدد طبیعی وجود ندارد})$$

پاسخ.

$$A \cap B = \{4, 5, 6, 7, 8\};$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = N$$

$$A \cap D = A \cap \phi = \phi;$$

$$C \cup D = C \cup \phi = C;$$

$$B - C = \phi;$$

$$A - B = \{1, 2, 3\};$$

$$C - A = \{9, 10, 11, 12, \dots\}$$

۵۹. الف) D تنها زیرمجموعه مجموعه‌های A و B است؛ مجموعه‌های

C ، E و F ، به این دلیل که $s \notin B$ نمی‌توانند زیرمجموعه B باشند.

آزمایش درستی عمل تقسیم است.

* یادداشت. روش دیگری هم، برای آزمایش درستی تقسیم، وجود دارد که آن را «روش کنار زدن ۹» یا «روش استفاده از مضرب‌های ۹» می‌نامند. این روش بسیار ساده است و کار را به سرعت به پایان می‌رساند، ولی به آن اطمینان کامل نمی‌توان داشت و با وجودی که در مورد پرسش «آیا عمل تقسیم درست انجام شده است یا نه؟»، پاسخ مثبت بدهد، باز هم ممکن است عمل تقسیم درست انجام نشده باشد.

برای آشنا شدن با این روش، مثالی می‌آوریم.

$$\begin{array}{r|l} 24591 & 28 \\ 7 & 878 \end{array}$$

در این جا با چهار عدد سروکار داریم: ۲۴۵۹۱ (بخشی)، ۲۸ (بخشیاب)، ۸۷۸ (خارج قسمت) و ۷ (باقی مانده).

در هریک از این چهار عدد، مجموع رقم‌ها را محاسبه می‌کنیم و هرچند مضرب ۹ در آن وجود دارد، بیرون می‌رویم. برای بخشی:

$$2 + 4 + 5 + 9 + 1 = 21; 21 - 18 = 3$$

برای بخشیاب

$$2 + 8 = 10; 10 - 9 = 1$$

برای خارج قسمت

$$8 + 7 + 8 = 23; 23 - 18 = 5$$

و برای باقی‌مانده تقسیم: ۷

اکنون حاصل ضرب خارج قسمت در بخش‌یاب را با باقی مانده جمع می‌کنیم و دویاره مضرب‌های ۹ را از آن بیرون می‌رویم:

$$1 \times 5 + 7 = 12; \quad 12 - 9 = 3$$

این، همان عددی است که برای بخشی (بعد از بیرون کردن مضرب‌های ۹) به دست آورده بودیم.

ولی توجه کنید، اگر به جای باقی مانده، یا خارج قسمت و یا هردو، به اندازه مضربی از ۹ اشتباه کرده بودیم (مثلاً، برای باقی مانده ۱۶ یا ۲۵ به دست آمده بود)، با این روش، اشتباه عمل تقسیم روشن نمی‌شد.

با وجود این، چون کمتر احتمال دارد که درست به اندازه مضربی از ۹، در خارج قسمت یا باقی مانده اشتباه کنیم، استفاده از این روش می‌تواند سودمند باشد.

۶۵. یا جمله اول تفریق (مفروق) را به اندازه ۱۶ واحد کم می‌کنیم و یا به جمله دوم تفریق (مفروق منه) ۱۶ واحد اضافه می‌کنیم.

۶۶. پاسخ. ۱) حاصل ضرب ۳ برابر می‌شود؛ ۲) به حاصل ضرب به اندازه ۳ برابر جمله دیگر اضافه می‌شود؛ ۳) حاصل ضرب نصف می‌شود؛ ۴) از حاصل ضرب، به اندازه دوبرابر جمله دیگر کم می‌شود.

کوشش کنید، برای هریک از این چهار حالت، دلیل بیاورید.

۶۷. ۱) این تقسیم را در نظر می‌گیریم:

$$a = b \cdot q + r$$

که در آن، a بخشی، b بخش‌یاب، q خارج قسمت و r باقی مانده تقسیم است. اگر دو طرف برابری را بر ۲ تقسیم کنیم، چنین می‌شود:

$$\frac{a}{2} = b \cdot \frac{q}{2} + \frac{r}{2}$$

$$\begin{aligned} & \{1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, 5 \times 6, 6 \times 7, \dots\} = \\ & = \{2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, \dots\}; \\ & \{1^2 + 1, 2^2 + 1, 3^2 + 1, 4^2 + 1, 5^2 + 1, 6^2 + 1, \dots\} = \\ & = \{2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, \dots\} \end{aligned}$$

ولی درین زیرمجموعه‌های بی‌پایان مجموعه عددهای طبیعی، برخی بسیار مشهورند و کاربردهایی پیدا کرده‌اند. در این جا، به بعضی از آنها اشاره می‌کنیم.

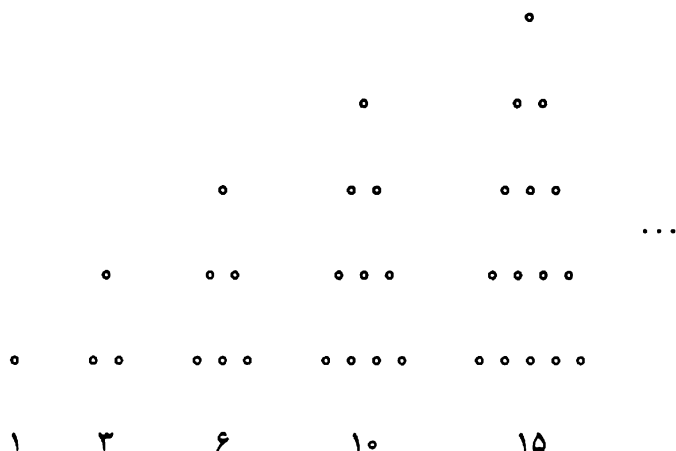
دنباله فیوناچی. لئونارووی پیزایی (یعنی اهل پیزای ایتالیا (۱۱۷۰-۱۲۵۰ میلادی) معروف به فیوناچی (یعنی پسر بوناچی) که ضمن مسافرت‌های فراوان خود، با نوشته‌های ریاضی ملت‌های خاور و به‌ویژه ایرانی آشنا شده بود (او به‌ویژه زیر تأثیر نوشته‌های ریاضی کرجی ریاضی‌دان ایرانی و به‌خصوص کتاب جبر او به‌نام فخری بود)، در مساله‌ای که درباره زادوولد خرگوش‌ها مطرح می‌کند، به دنباله عددهای زیر می‌رسد:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

در این دنباله، از جمله سوم به‌بعد، هر جمله برابر است با مجموع دو جمله پیش‌ازخود. دنباله عددهای فیوناچی، ویژگی‌های بسیار جالبی دارد که امیدواریم در جلدهای بعدی، به‌موقع خود، درباره آن‌ها صحبت کنیم. دنباله عددهای فیوناچی، زیرمجموعه بی‌پایانی از مجموعه عددهای طبیعی است؛ و چون بنابه تعریف کانتور، در یک مجموعه؛ عضوهای تکراری، تنها یکبار نوشته می‌شوند، می‌توان مجموعه عددهای فیوناچی را این‌طور نوشت:

$$\text{مجموعه عددهای فیوناچی} = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$$

عدهای چندضلعی. تعداد زیادی سکه‌های مساوی بردارید و تلاش کنید، با کنار هم گذاشتن آن‌ها در روی میز، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع درست کنید (شکل ۳۶).



شکل ۳۶: عدهای منفی

به این ترتیب، دنباله‌ای از عدها به دست می‌آید:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, \dots$$

درواقع، اگر جمله اول این دنباله را، برابر ۱ بگیریم، باید عدهای طبیعی را (با آغاز از ۲) و به ترتیب به هر جمله اضافه کنیم تا جمله بعد به دست آید:

$$\begin{aligned} 1+2 &= 3 \text{ (جمله دوم)}; & 3+3 &= 6 \text{ (جمله سوم)}; \\ 6+4 &= 10; & 10+5 &= 15; & 15+6 &= 21; \dots \end{aligned}$$

عددهای طبیعی را، با حروف سیاه آورده‌ایم تا روش کار روشن‌تر شود.
این عددها را، عددهای مثلثی گویند:

$$= (\text{مجموعه عددهای مثلثی}) \\ \{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, \dots\}$$

* اگر علاقه‌مند باشید، می‌توان راهی را پیدا کرد که بتوانیم، به‌طور مستقیم، هر جمله از دنباله عددهای مثلثی را پیدا کنیم.
در واقع، برای پیدا کردن جمله دوم، ۲ واحد به جمله قبل اضافه کردیم؛ برای پیدا کردن جمله سوم، ۳ واحد به جمله قبل اضافه کردیم، ...، برای پیدا کردن جمله دهم، ۱۰ واحد به جمله قبل اضافه کردیم و غیره.
اگر جمله عمومی این دنباله، یعنی جمله n ام آن را U_n بنامیم، به‌ترتیب، می‌توان نوشت:

$$U_n = U_{n-1} + n$$

$$U_{n-1} = U_{n-2} + (n - 1)$$

$$\dots$$

$$U_2 = U_1 + 2$$

$$U_2 = U_1 + 2$$

$$U_1 = 1$$

این برابری‌ها را باهم جمع می‌کنیم، بعد از حذف جمله‌های مساوی در دو طرف برابری، به‌دست می‌آید:

$$U_n = n + (n - 1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

این برابری را دوبار زیرهم می‌نویسیم، یکبار از n تا 1 و یکبار از 1 تا n :

$$\begin{cases} U_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 \\ U_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \end{cases}$$

و باهم جمع می‌کنیم: مجموع هر دو عددی که در سمت راست برابری‌ها، زیرهم قرار دارند، برابر $n+1$ می‌شود و چون در سمت راست هر برابری، n عدد وجود دارد، بنابراین به‌دست می‌ید:

$$2U_n = n(n+1) \Rightarrow U_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثلاً، جمله دهم دنباله عددهای مثلثی

$$U_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

و جمله هزارم آن

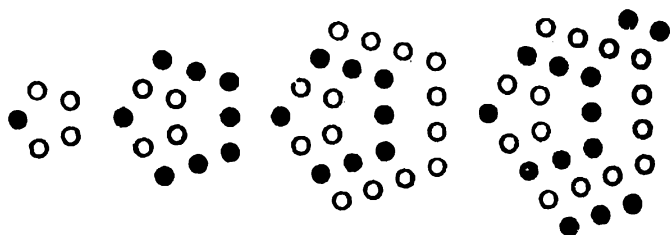
$$U_{1000} = \frac{1000 \times 1001}{2} = 500500$$

می‌شود.

شبهه عددهای مثلثی، می‌توان عددهای مربعی را به‌دست آورد. آزمایش با سکه‌های برابر، دشوار نیست و، درواقع، عددهای مربعی، همان مربع یا مجذور عددهای طبیعی‌اند، که زیرمجموعه‌ای بی‌پایان از مجموعه عددهای طبیعی است:

$$\text{مجموعه عددهای مربعی} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots\}$$

* شبهه عددهای مثلثی و عددهای مربعی، می‌توان به عددهای به‌صورت پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی و غیره دست یافت که، در این‌جا، از تفصیل دربارهٔ



شکل ۳۷: عددهای پنج ضلعی

آن‌ها می‌گیریم. در شکل ۳۷، پنج عدد نخستین به صورت پنج ضلعی داده شده است.

$$= \text{مجموعه عددهای پنج ضلعی} \\ = \{1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, \dots\}$$

پیدا کردن عددهای چندضلعی، یک سرگرمی جالب ریاضی است، به ویژه اگر کوشش شود، رابطه بین این عددها، و مثلاً رابطه بین عددهای پنج ضلعی و عددهای مثلثی کشف شود.

$$۷۲. \text{ پاسخ. } (1 : 18 ; 2 : 30 ; 3 : 48) \text{ یا } 164820.$$

۷۳. برای ضرب یک عدد در ۵، یک صفر در سمت راست عدد بگذارید و بعد آن را نصف کنید (چرا؟). (۲) برای ضرب عددی در ۲۵، دو صفر در سمت راست عدد بگذارید و بعد $\frac{1}{4}$ آن را به دست آورید. (۳) برای ضرب عددی در ۹، خود عدد را از ده برابر آن کم کنید. (۴) برای ضرب در ۹۹، خود عدد را از ۱۰۰ برابر آن کم کنید. (۵) برای ضرب در ۱۱ دو روش وجود دارد: می‌توانید ده برابر عدد را با خودش جمع کنید، یا رقم سمت راست عدد را به عنوان رقم سمت راست حاصل ضرب بنویسید و برای رقم‌های بعدی حاصل ضرب، پشت سرهم، هر دو رقم مجاور عدد اصلی را

باهم جمع کنید: مثلاً برای ضرب ۴۷۹۶۲ در ۱۱:

$$\text{رقم یکان حاصل ضرب} = ۲$$

$$\text{رقم دهگان} = ۸ = ۶ + ۲$$

$$\text{رقم صدگان} = ۵ = ۹ + ۶$$

$$\text{هزارگان} = ۷ = ۷ + ۹ + ۱$$

$$\text{ده هزارگان} = ۲ = ۴ + ۷ + ۱$$

$$\text{صدهزارگان} = ۵ = ۴ + ۱$$

$$۴۷۹۶۲ \times ۱۱ = ۵۲۷۵۸۲$$

۶) برای ضرب عددی در ۱۰۱، دو صفر سمت راست آن بگذارید (یعنی آن را صد برابر کنید) و بعد، با خودش جمع کنید. (۷) برای تقسیم بر ۵، دو برابر آن را بر ۱۰ تقسیم کنید. (۸) برای تقسیم بر ۲۵، چهار برابر عدد را بر ۱۰۰ تقسیم کنید. (۹) برای تقسیم بر ۵۰، دو برابر عدد را بر ۱۰۰ تقسیم کنید مثلاً برای تقسیم عدد ۴۳۷۵ بر ۲۵:

$$۴۳۷۵ \times ۴ = ۱۷۵۰۰;$$

$$۱۷۵۰۰ : ۱۰۰ = ۱۷۵;$$

$$۴۳۷۵ : ۲۵ = ۱۷۵$$

۷۴. چنین حاصل ضربی همیشه به ۲۵ ختم می شود و باید در سمت چپ ۲۵، حاصل ضرب دهگان عدد در عدد بلافاصله بعد از آن را نوشت. مثلاً برای ۶۵×۶۵ ، حاصل ضرب ۶ در عدد بلافاصله بعد از آن، یعنی ۷، برابر ۴۲ می شود، پس

$$۶۵ \times ۶۵ = ۴۲۲۵$$

$$95 \times 95 = 9025$$

$$115 \times 115 = 13225$$

(۱۳۲ برابر است با حاصل ضرب 12×11).

* یادداشت. اگر عدد مفروض را $\overline{a5}$ فرض کنیم، به ترتیب داریم:

$$\overline{a5} = 10a + 5$$

$$(10a + 5)(10a + 5) =$$

$$= 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$$

و این نشان می‌دهد که حاصل ضرب به ۲۵ ختم می‌شود و در سمت چپ آن باید $a(a + 1)$ را نوشت.

۱۷۵. برای بخش‌پذیری بر ۲، ۵ و ۱۰. اگر عدد را $\overline{ab}$ فرض کنیم (b ، یک رقم است، ولی a را می‌توان یک عدد در نظر گرفت؛ مثلاً در ۳۲۵، داریم: $b = 5$ و $a = 32$). این عدد را می‌توان به صورت $10a + b$ نوشت. $10a$ همیشه بر ۲، بر ۵ و بر ۱۰ بخش‌پذیر است، بنابراین، برای این که عدد بر ۲، ۵ یا ۱۰ بخش‌پذیر باشد، باید b مضربی از این عدد باشد: b وقتی مضرب ۲ است که زوج باشد؛

b وقتی مضرب ۵ است که برابر ۵ یا صفر باشد؛

b وقتی مضرب ۱۰ است که برابر صفر باشد.

(۲) برای بخش‌پذیری بر ۴ و ۲۵. عدد را $\overline{abc}$ فرض کنید و به صورت $100a + \overline{bc}$ بنویسید.

(۳) برای بخش‌پذیری بر ۸ و ۱۲۵. عدد را به صورت $\overline{abcd}$ در نظر بگیرید، که در واقع برابر است با $1000a + \overline{bcd}$.

(۴) برای بخش‌پذیری بر ۳ و ۹. اگر عدد را مثلاً چهاررقمی و به صورت $\overline{abcd}$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$$

باقی‌مانده حاصل از تقسیم عددهای ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ بر ۳ یا ۹ برابر واحد است. پس باقی‌مانده حاصل از تقسیم این عدد بر ۳ یا ۹ برابر است با باقی‌مانده حاصل از تقسیم

$$a + b + c + d$$

بر ۳ یا ۹. بنابراین، وقتی عدد مفروض بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر است که مجموع رقم‌های آن بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر باشد.

(۵) برای بخش‌پذیری بر ۶، ۱۲، ۱۴ و ۱۵. پیش از این گفتیم، اگر دو عدد نسبت به هم اول باشد و عدد سوم بر هریک از این دو عدد بخش‌پذیر باشد، بر حاصل ضرب آن‌ها بخش‌پذیر است.

۲ و ۳ نسبت به هم اول‌اند، پس عددی بر ۶ بخش‌پذیر است که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد؛ همچنین عددی بر ۱۲ یا ۱۴ یا ۱۵ بخش‌پذیر است که بر ۳ و ۴ یا ۲ و ۷ یا ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد.

(۶) برای بخش‌پذیری بر ۱۱. عدد را شش‌رقمی فرض می‌کنیم:

$$\overline{abcdef} = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$$

با اندکی توجه معلوم می‌شود که باقی‌مانده تقسیم هریک از عددهای ۱۰۰ و ۱۰۰۰۰ بر ۱۱ برابر واحد است:

$$100 = 9 \times 11 + 1; \quad 10000 = 909 \times 11 + 1$$

باقی‌مانده حاصل از تقسیم عددهای ۱۰ و ۱۰۰۰ و ۱۰۰۰۰۰ بر ۱۱ برابر است با ۱۰، ولی اگر ۱۰ را برابر ۱۱-۱ بنویسیم، می‌توانیم باقی‌مانده تقسیم این عددها را بر ۱۱ برابر ۱- فرض کنیم

$$10 = 1 \times 11 - 1; \quad 1000 = 91 \times 11 - 1;$$

$$100000 = 9091 \times 11 - 1$$

بنابراین، اگر در بازشده عدد، مضرب‌های ۱۱ را کنار بگذاریم، به عدد

$$(f + d + b) - (e + c + a) \quad (1)$$

می‌رسیم، یعنی وقتی عدد مفروض بر ۱۱ بخش‌پذیر است که عدد (۱) بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

(۷) برای بخش‌پذیری بر ۷ و ۱۳. راهنمایی. عددهای

$$10^3, 10^9, 10^{15}, \dots$$

در تقسیم بر ۷ یا ۱۳ به باقی‌مانده ۱- و عددهای

$$10^6, 10^{12}, 10^{18}, \dots$$

در تقسیم بر ۷ یا ۱۳ به باقی‌مانده ۱+ می‌رسند.
۷۶

$$6 \text{ های مضرب‌های } = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\};$$

$$9 \text{ های مضرب‌های } = \{9, 18, 27, 36, 45, 54, \dots\};$$

$$15 \text{ های مضرب‌های } = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, \dots\};$$

$$15 \text{ و } 9 \text{ و } 6 \text{ مشترک‌های مضرب‌های } = \{90, 180, 270, 360, \dots\}$$

$$15 \text{ و } 9 \text{ و } 6 \text{ کوچکترین مضرب مشترک } = 90$$

$$۳۶ = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۹, ۱۲, ۱۸, ۳۶\};$$

$$۶۰ = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۱۰, ۱۲, ۱۵, ۲۰, ۳۰, ۶۰\};$$

$$۸۴ = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۷, ۱۲, ۱۴, ۲۱, ۲۸, ۴۲, ۸۴\};$$

$$\{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۱۲\} = \text{مجموعه بخش‌های مشترک ۳۶ و ۶۰ و ۸۴}$$

$$۱۲ = \text{بزرگترین بخش‌های مشترک ۳۶ و ۶۰ و ۸۴}$$

۷۸. مضرب‌های مشترک دو عدد، مجموعه‌ای بی‌پایان را تشکیل می‌دهند

و، بنابراین، بزرگترین مضرب مشترک برای دو عدد وجود ندارد.

هر عدد طبیعی بر ۱ بخش‌پذیر است و، بنابراین، عدد ۱، کوچکترین

بخش‌های مشترک هر دو عدد دلخواه است.

۷۹. ساده‌ترین عدد شش‌رقمی با رقم‌های مساوی چنین است:

$$۱۱۱۱۱۱$$

این عدد بر ۷ بخش‌پذیر است و خارج‌قسمت تقسیم برابر ۱۵۸۷۳ می‌شود:

$$۱۵۸۷۳ \times ۷ = ۱۱۱۱۱۱$$

و روشن است، اگر دو برابر یا سه برابر عدد ۱۵۸۷۳ را در ۷ ضرب کنیم،

عددی شش‌رقمی با رقم‌های ۲ یا ۳ به دست می‌آید. به این ترتیب ۹ عدد وجود

دارد که از ضرب هریک از آن‌ها در ۷، عددی شش‌رقمی با رقم‌های برابر

به دست می‌آید:

$$۱۵۸۷۳ \times ۷ = ۱۱۱۱۱۱;$$

$$۳۱۷۴۶ \times ۷ = ۲۲۲۲۲۲;$$

$$۴۷۶۱۹ \times ۷ = ۳۳۳۳۳۳;$$

$$۶۳۴۹۲ \times ۷ = ۴۴۴۴۴۴;$$

.....

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۷ = ۹۹۹۹۹۹$$

۸۰. (۱) در عدد $\overline{abc}$ فرض می‌کنیم $a > c$ ، در این صورت $\overline{cba}$ از $\overline{abc}$ کوچکتر است و داریم.

$$\begin{aligned}\overline{abc} - \overline{cba} &= (۱۰۰a + ۱۰b + c) - (۱۰۰c + \\ &+ ۱۰b + a) = ۹۹a - ۹۹c = ۹۹(a - c)\end{aligned}$$

و روشن است که ۹۹، بر ۹ و ۱۱ بخش‌پذیر است.

یادداشت. وقتی رقم‌های یک عدد را طوری جابه‌جا کنیم که رقم‌های عدد اول (از چپ به راست) با رقم‌های عدد دوم (از سمت راست به چپ) برابر باشد، دو عدد را مقلوب یکدیگر گویند: ۱۲ و ۲۱ یا ۳۷۵ و ۵۷۳ یا ۲۴۳۸ و ۸۳۴۲، مقلوب یکدیگرند.

(۲) این عدد شش‌رقمی را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\overline{abcabc} = ۱۰۰۰\overline{abc} + \overline{abc} = ۱۰۰۱\overline{abc},$$

$$\text{و } ۱۰۰۱ = ۷ \times ۱۱ \times ۱۳$$

۸۱. اگر عدد دورقمی را $\overline{xy}$ فرض کنیم

($۰ < x \leq ۹$ و $۰ \leq y \leq ۹$)، باید داشته باشیم:

$$\overline{xy} = (x + ۲)(y + ۲)$$

$$۱۰x + y = xy + ۲x + ۲y + ۴$$

یا

این برابری، به ترتیب، به این صورت درمی آید:

$$xy + y = 8x - 4; \quad y(x + 1) = 8x - 4;$$

$$y = \frac{8x - 4}{x + 1} = \frac{8(x + 1) - 12}{x + 1} = 8 - \frac{12}{x + 1}$$

چون باید برای y عدد درستی (از صفر تا ۹) به دست آید، پس قبل از همه، باید ۱۲ بر $x + 1$ بخش پذیر باشد. ۱۲ بر این عددها بخش پذیر است:

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

ولی $x + 1$ برابر ۱ یا ۱۲ نمی تواند باشد، زیرا از $x + 1 = 1$ ، به دست می آید $x = 0$ که قابل قبول نیست و از $x + 1 = 12$ ، به دست می آید $x = 11$ که باز هم قابل قبول نیست (x ، یک رقم از ۱۰ کوچکتر است). در حالت های دیگر به سادگی x و y و در نتیجه، عدد دورقمی $\overline{xy}$ پیدا می شود:

$$x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \text{ و } y = 2; \overline{xy} = 12;$$

$$x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \text{ و } y = 4; \overline{xy} = 24;$$

$$x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3 \text{ و } y = 5; \overline{xy} = 35;$$

$$x + 1 = 6 \Rightarrow x = 5 \text{ و } y = 6; \overline{xy} = 56$$

مساله چهار جواب دارد: ۱۲، ۲۴، ۳۵ و ۵۶.

۸۲. باید داشته باشیم:

$$10a + b = (a + n)(b + n)$$

ثابت می کنیم، عدد n نمی تواند از ۶ بزرگتر باشد. اگر $n \geq 7$ ، آن وقت، چون $a \neq 0$ ، باید داشته باشیم:

$$a + n \geq 8 \text{ و } b + n \geq 7$$

پس $56 \leq (a+n)(b+n)$ ، یعنی عدد دورقمی $\overline{ab}$ باید بزرگتر یا برابر ۵۶ باشد و، بنابراین، $a \geq 5$ ، ولی دراین صورت

$$a+n \geq 12 \text{ و } b+n > 7$$

در نتیجه $84 = 12 \times 7 \leq \overline{ab}$ و $a \geq 8$ ، دراین صورت

$$\overline{ab} \geq 105 \text{ و } b+n \geq 7 \text{ و } a+n \geq 15$$

که بی‌معنی است، زیرا $\overline{ab}$ عددی دورقمی است و نمی‌تواند از ۹۹ بزرگتر باشد.

به‌این ترتیب، بزرگترین عدد برای n ، ممکن است ۶ باشد. به‌ازای $n = 6$ ، باید داشته‌باشیم:

$$(a+6)(b+6) = 10a+b$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$ab + 5b + 36 = 4a$$

ولی حداکثر مقدار a ، برابر است با ۹، پس سمت راست تساوی، حداکثر برابر است با ۳۶، که دراین صورت به‌دست می‌آید $b = 0$.

پاسخ: بزرگترین مقدار n ، عبارت است از $n = 6$ که برای عدد دورقمی ۹۰ صلق می‌کند:

$$90 = (9+6)(0+6)$$

۸۳. عدد مجهول را x می‌نامیم. دراین صورت، برای این‌که عدد $8x$ ، عددی نه‌رقمی باشد، باید از سمت چپ با عدد دورقمی ۱۲ آغاز شود (چرا؟)، یعنی

$$x = 12 \dots$$

ولی، برای این که در $۸x$ ، رقم‌ها تکرار نشوند، باید داشته باشیم:

$$x = ۱۲۳\dots$$

زیرا اگر $x = ۱۲۴\dots$ ، آن وقت $۸x = ۹۹\dots$ (اگر $x = ۱۲۵\dots$ یا بزرگتر از آن باشد، آن وقت $۸x$ ، عددی ۱۰ رقمی می‌شود.

با استدلال‌هایی مشابه:

اگر $x = ۱۲۳۵\dots$ ، آن وقت $۸x = ۹۸۸\dots$ (یعنی دارای رقم تکراری) و، بنابراین $x = ۱۲۳۴\dots$.

اگر $x = ۱۲۳۴۶\dots$ ، آن وقت $۸x = ۹۸۷۶۸\dots$ ؛ پس $x = ۱۲۳۴۵\dots$.

اگر $x = ۱۲۳۴۵۷\dots$ ، آن وقت $۸x = ۹۸۷۶۵۶\dots$ ، بنابراین $x = ۱۲۳۴۵۶\dots$.

اگر $x = ۱۲۳۴۵۶۸\dots$ ، آن وقت $۸x = ۹۸۷۶۵۴۴\dots$ ، $x = ۱۲۳۴۵۶۷\dots$.

اگر $x = ۱۲۳۴۵۶۷۹۸\dots$ ، به دست می‌آید:

$$۸x = ۹۸۷۶۵۴۳۸۴$$

پس $x = ۱۲۳۴۵۶۷۸۹\dots$ ، این عدد، با شرط‌های مساله سازگار است، زیرا

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹ \times ۸ = ۹۸۷۶۵۴۳۱۲$$

یادداشت. جالب این است که، اگر عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸۹ را در ۲ یا ۴ هم ضرب کنیم، در حاصل ضرب، بازهم همین رقم‌ها (و البته با ردیف‌های دیگری) به دست می‌آید:

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹ \times ۲ = ۲۴۶۹۱۳۵۷۸$$

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹ \times ۴ = ۴۹۳۸۲۷۱۵۶$$

۸۴. فرض می‌کنیم، مجموعه عددهای طبیعی را به دو زیرمجموعه A و B تقسیم کرده باشیم، به نحوی که

$$A \cup B = \mathbb{N} \text{ و } A \cap B = \emptyset$$

و فرض می‌کنیم، مجموعه A دارای ویژگی موردنظر مساله نباشد، یعنی میانگین حسابی هیچ دو عضوی از آن، متعلق به مجموعه A نباشد. سه عدد طبیعی ۶ و ۸ و ۱۰ را در نظر می‌گیریم. چند حالت ممکن وجود دارد:

(۱) $6 \in A$ و $8 \in A$ ؛ در این صورت $10 \in B$ ، زیرا اگر 10 عضو مجموعه A باشد، آن وقت میانگین حسابی دو عدد ۶ و ۱۰، یعنی ۸ عضو A می‌شود که مخالف فرض است. همچنین، در این حالت $4 \in B$ (۶)، میانگین حسابی دو عدد ۴ و ۸ است) و $7 \in B$ (میانگین حسابی ۶ و ۸). ولی برای سه عدد ۴ و ۷ و ۱۰ (که هر سه عضو مجموعه B هستند)، داریم:

$$7 = \frac{4 + 10}{2}$$

(۲) $6 \in A$ و $10 \in A$ ؛ با استدلالی شبیه حالت قبل باید داشته باشیم: $2 \in B$ ، $8 \in B$ ، $14 \in B$ ، ولی

$$8 = \frac{2 + 14}{2}$$

(۳) $10 \in A$ ، $8 \in A$ ؛ در این صورت $6 \in B$ ، $9 \in B$ ، $12 \in B$

و

$$9 = \frac{6 + 12}{2}$$

(۴) $A \notin 6$ ، $A \notin 8$ و $A \notin 10$ ، در این صورت این سه عدد عضو B هستند و داریم:

$$8 = \frac{6 + 10}{2}$$

حالت دیگری وجود دارد، زیرا اگر از عددهای ۶ و ۸ و ۱۰، تنها یکی عضو A و دوتای دیگر عضو B باشند، آنوقت به یکی از سه حالت اول (با جابه‌جا شدن نقش زیرمجموعه‌های A و B) منجر می‌شود.

۸۵. نخستین شماره‌ها، متعلق به عددهایی است که با ۱ آغاز شده‌اند. در این عددها، رقم‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، به ردیفی دلخواه، بعد از رقم ۱ آمده‌اند، به نحوی که رقم دوم (از سمت چپ عدد) را، ۵ نوع می‌توان انتخاب کرد (یکی از رقم‌های ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶). وقتی رقم دوم معلوم باشد، رقم سوم را به ۴ طریق و، بعد، رقم چهارم را به ۳ طریق، رقم پنجم را به دو طریق می‌توان در نظر گرفت که، در این صورت، رقم ششم، به خودی خود معلوم می‌شود. به این ترتیب، تعداد عددهای شش‌رقمی که با ۱ آغاز می‌شوند، برابر است با

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

چون رقم اول (از سمت چپ) می‌تواند ۲ یا ۳ باشد (عدد A ، با ۴ آغاز شده‌است)، پس قبل از عدد A ، به تعداد 3×120 ، یعنی ۳۶۰ عدد وجود دارد که با ۱ یا ۲ یا ۳ آغاز شده‌اند.

به همین ترتیب، عدد A ، بعد از عددهایی قرار دارد که با ۴۱ یا ۴۲ آغاز شده‌اند تعداد این‌گونه عددها (شبه محاسبه قبل) برابر است با

$$2(4 \times 3 \times 2) = 2 \times 24 = 48$$

تعداد عددهایی که با ۴۳۱ و ۴۳۲ آغاز شده‌اند (عددی با آغاز ۴۳۳ یا ۴۳۴ نداریم، چون بنابر فرض، در عددها، رقم تکراری وجود ندارد)، برابر است

$$2(3 \times 2) = 2 \times 6 = 12$$

و سرانجام، دو عدد وجود دارد که با ۴۳۵۱ آغاز شده‌اند.

این‌ها، کل عددهایی هستند که قبل از عدد A قرار گرفته‌اند و تعداد آن‌ها برابر است با

$$360 + 48 + 12 + 2 = 422$$

بنابراین، عدد A ، در ردیف چهارصدویست و سوم است.

۸۶. یک عدد، وقتی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که، اگر مجموع رقم‌های ردیف زوج را S_1 و مجموع رقم‌های ردیف فرد را S_2 بنامیم (ردیف رقم‌ها را از راست به چپ در نظر می‌گیریم)، تفاوت $S_1 - S_2$ یا $S_2 - S_1$ برابر مضربی از ۱۱ یا برابر صفر باشد.

بیشترین مقدار S_1 ، می‌تواند برابر

$$4 + 5 + 6 = 15$$

و در نتیجه $S_2 = 1 + 2 + 3 = 6$ باشد که، در این صورت $S_1 - S_2$ برابر ۹ می‌شود. یعنی $S_1 - S_2$ یا $S_2 - S_1$ نمی‌تواند مضربی از ۱۱ باشد. از طرف دیگر داریم:

$$S_1 + S_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

که عددی است فرد و نمی‌توان آن را به دو بخش برابر تقسیم کرد تا تفاضل $S_1 - S_2$ برابر صفر شود.

بنابراین، عدد شش‌رقمی بخش‌پذیر بر ۱۱ که با رقم‌های مختلف از ۱ تا ۶ درست شده‌باشد، وجود ندارد.

۸۷. شرط مساله به این معناست که هیچ‌کدام از n عدد مرکب را (که عدد ۱۳۷۵ به صورت مجموع آن‌ها نوشته شده‌است)، نمی‌توان به مجموع دو

عدد مرکب دیگر تبدیل کرد. مجموعه A ، از عددهای مرکبی را پیدا می‌کنیم که هیچ عضو آن را نتوان به صورت مجموع دو عدد مرکب دیگر نوشت. m را عددی زوج می‌گیریم و آن را این طور می‌نویسیم:

$$m = 2k = 2(k - 2) + 4, \quad (k \in \mathbb{N})$$

اگر $k > 3$ ، آن وقت m نمی‌تواند عضوی از مجموعه A باشد، زیرا در چنین حالتی خواهیم داشت $1 < k - 1$ و، در نتیجه، خود m به مجموع دو عدد مرکب قابل تبدیل است:

$$(m = 2k \text{ و } k > 3) \Rightarrow m \notin A$$

به‌ازای $k = 1$ ، برای m عددی اول (غیرمرکب) به دست می‌آید؛ ولی به‌ازای $k = 2$ و $k = 3$ به دست می‌آید.

$$m = 4 \in A \text{ و } m = 6 \in A$$

اکنون m را عددی فرد می‌گیریم:

$$m = 2k + 1 = 2(k - 4) + 9, \quad (k \in \mathbb{N})$$

به‌ازای $k > 4$ ، عدد m قابل تبدیل به مجموع دو عدد مرکب است و

$$(m = 2k + 1 \text{ و } k > 4) \Rightarrow m \notin A$$

به‌ازای $k < 4$ ، عدد m غیرمرکب است و به‌ازای $k = 4$:

$$h = 4 \Rightarrow m = 9 \in A$$

بنابراین، مجموعه A تنها سه عضو دارد:

$$A = \{4, 6, 9\}$$

به این ترتیب هر n جمله‌ای که، مجموع آن‌ها، برابر عدد ۱۳۷۵ شده است، از همین سه عدد ۴، ۶ و ۹ تشکیل شده است. ولی ۹ یا ۶ نمی‌توانند در این مجموعه تکرار شوند، زیرا اگر در مجموع داشته باشیم $۹ + ۹$ یا $۶ + ۶$ آن وقت مجموع اولی را می‌توان به صورت $۶ + ۶ + ۶$ و مجموع دومی را به صورت $۴ + ۴ + ۴$ نوشت، یعنی در هر حال به تعداد جمله‌های جمع اضافه می‌شود، در حالی که، بنابر شرط مساله، جمله‌های جمع، یعنی تعداد عددهای مرکب نمی‌تواند زیاده‌تر شود. در ضمن ۹ در این مجموع وجود دارد، زیرا ۱۳۷۵ عدد فرد است و نمی‌توان آن را به مجموع عددهای برابر ۴ تبدیل کرد. به جز این، چون

$$۱۳۷۵ - ۹ = ۱۳۶۶$$

و عدد ۱۳۶۶ بر ۴ بخش‌پذیر نیست، باید عدد ۶ هم در مجموع وجود داشته باشد. در نتیجه

$$\begin{aligned} ۱۳۷۵ &= ۹ + ۶ + ۴ \times ۳۴۰ = \\ &= ۹ + ۶ + \underbrace{۴ + ۴ + \dots + ۴}_{\text{۳۴۰ بار}} \end{aligned}$$

پاسخ. $n = ۳۴۲$.

۸۸. عدد مجهول را x می‌نامیم و $y = ۴x$ را عددی می‌گیریم که با انتقال رقم ۴، از سمت راست x به سمت چپ آن به دست آمده است. نخستین رقم سمت چپ در y برابر ۴ است، بنابراین نخستین رقم سمت چپ x برابر ۱ می‌شود (زیرا x ، از تقسیم y بر ۴ به دست می‌آید). چون ردیف رقم‌های y ، از چپ راست و بعد از رقم ۴، همان رقم‌های x (باز هم از چپ به راست) است، پس عدد y با دو رقم ۴۱ آغاز می‌شود. از تقسیم ۴۱ بر ۴، معلوم می‌شود، رقم دوم x ، (از چپ به راست) و، بنابراین،

رقم سوم y (از چپ به راست) برابر صفر است و y با رقم‌های 410 آغاز می‌شود.

با تقسیم 410 و 4 ، سومین رقم x و، بنابراین، چهارمین رقم y ، برابر 2 ، به دست می‌آید: عدد y با 4102 آغاز می‌شود به همین ترتیب دو رقم بعد y به دست می‌آید و ما را به عدد شش رقم 410256 می‌رساند که 4 برابر 102564 است.

پاسخ. عدد مجهول برابر است با 102564 .

یادداشت. می‌توانستیم، به جای استفاده از تقسیم، عدد x را 4 برابر کنیم. رقم سمت راست x ، طبق فرض، برابر است با 4 ؛ چون 4 برابر 4 مساوی است با 16 ، پس رقم سمت راست y برابر است با 6 . همین رقم 6 ، رقم دوم x (از سمت راست) می‌شود که با ضرب 64 در 4 ، معلوم می‌شود رقم دوم y ، یعنی رقم سوم x (از سمت راست) برابر 5 است و غیره.

۸۹. چون X می‌تواند هر زیرمجموعه دلخواهی از مجموعه C باشد، باید برابری موردنظر مساله، برای $X = C$ هم برقرار باشد، یعنی داشته باشیم:

$$C \cap A = C \cup B$$

ولی چون $B \subset C$ ، پس $C \cup B = C$ و باید داشته باشیم:

$$C \cap A = C \Rightarrow A = C$$

از طرف دیگر، برابری موردنظر، باید برای $X = \phi$ هم برقرار باشد:

$$\phi \cap A = \phi \cup B$$

چون اشتراک هر مجموعه‌ای با مجموعه تهی، یک مجموعه تهی است:

$$\phi \cup B = B = \phi$$

پاسخ. $A = C$ و $B = \phi$.

۹۰. عدد دورقمی را $\overline{xy} = 10x + y$ می‌گیریم. با گذاشتن رقم صفر، بین دو رقم آن، به عدد سهرقمی $\overline{x0y} = 100x + y$ می‌رسیم. باید این عدد سهرقمی بر عدد دورقمی ما بخش‌پذیر باشد. خارج‌قسمت را k می‌نامیم:

$$k = \frac{100x + y}{10x + y} = \frac{10(10x + y) - 9y}{10x + y} = 10 - \frac{9y}{10x + y}$$

پس حداکثر مقدار k ، یعنی خارج قسمت، برابر است با ۱۰ و وقتی به‌دست می‌آید که داشته‌باشیم $y = 0$ در این حالت، x می‌تواند هر رقم دلخواه از ۱ تا ۹ باشد. مثلاً، اگر عدد دورقمی برابر ۷۰ باشد، با گذاشتن ۰ بین رقم‌های آن، برابر ۷۰۰ می‌شود و درضمن

$$700 : 70 = 10$$

برای پیدا کردن کوچکترین مقدار k ، باید با آزمایش و استفاده از روش جست‌وجو عمل کنیم. قبل از هرچیز، باید $9y$ بر $10x + y$ بخش‌پذیر باشد. اگر y را برابر رقم‌های از ۱ تا ۹ بگیریم، برای $9y$ ، این عددها به‌دست می‌آید:

$$9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81$$

ولی برای $y = 1$ ، جوابی به‌دست نمی‌آید، زیرا عدد یک‌رقمی ۹ نمی‌تواند بر عدد دورقمی بخش‌پذیر باشد، ۱۸ بر ۱۲ بخش‌پذیر نیست؛ ۲۷ نه بر ۱۳ بخش‌پذیر است نه بر ۲۳ و ۳۶ بر هیچ‌کدام از عددهای ۱۴، ۲۴ و ۳۴ بخش‌پذیر نیست.

ولی ۴۵ بر ۱۵ بخش‌پذیر است که، در این صورت،

$$k = 105 : 15 = 7$$

البته ۴۵ بر ۲۵ و ۳۵ بخش پذیر نیست، ولی بر ۴۵ بخش پذیر است.
در این حالت

$$k = 405 : 45 = 9 > 7$$

۵۴ بر هیچ کدام از عددهای ۱۷، ۲۷، ۳۷، ۴۷ و ۵۷ بخش پذیر نیست.
۷۲ بر ۱۸ بخش پذیر و بر ۲۸، ۳۸، ۴۸، ۵۸ و ۶۸ بخش ناپذیر است
و برای $\overline{xy} = 18$ داریم:

$$k = 108 : 18 = 6 < 7$$

۸۱ هم بر هیچ کدام از عددهای ۱۹، ۲۹، ۳۹، ۴۹، ۵۹، ۶۹ و ۷۹
بخش پذیر نیست

پاسخ. بزرگترین مقدار خارج قسمت برابر ۱۰ و برای عدد $\overline{x0}$ است؛
کوچکترین مقدار خارج قسمت برابر ۶ و برای عدد دورقمی ۱۸ است.

۹۱. راه حل اول. سه رقم را a و b و c می گیریم. فرض را بر این می گیریم که
 $a > b > c$ ، بنابراین، بزرگترین دو عددی که با این سه رقم ساخته می شود،
عبارتند از دو عدد $\overline{abc}$ و $\overline{acb}$. در ضمن $abc > \overline{acb}$ ، ولی، در این صورت
باید داشته باشیم:

$$2\overline{abc} > 1444 \text{ و } 2\overline{acb} < 1444$$

از آنجا $\overline{abc} > 722$ و $\overline{acb} < 722$ که، از آنها، بلافاصله نتیجه
می شود $a = 7$ و $c < 2$ ، یعنی $c = 1$ ، و بنابراین، باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} \overline{abc} + \overline{acb} &= (700 + 10b + 1) + (700 + 10 + b) = \\ &= 1411 + 11b \end{aligned}$$

که باید برابر ۱۴۴۴ باشد، یعنی $b = 3$.

راه حل دوم. طبق فرض داریم:

$$\overline{abc} + \overline{acb} = 1444$$

که اگر عددها را باز کنیم:

$$200a + 11(b + c) = 1444$$

این برابری را می توان این طور نوشت:

$$11(b + c) - 44 = 200(7 - a)$$

سمت چپ این برابری بر ۱۱ بخش پذیر است، پس باید سمت راست آن هم بر ۱۱ بخش پذیر باشد و این، ممکن نیست، مگر داشته باشیم $a = 7$ ، در این صورت به دست می آید: $b + c = 4$ و چون $b > c$ ، پس $c = 1$ $b = 3$.

۹۲. مجموع دو عدد دورقمی از ۲۰۰ کمتر است، بنابراین $e = 1$ و در نتیجه یکی از رقم های a, b, c یا d هم برابر است با ۱. فرض می کنیم $a = 1$ ، در این صورت، از برابری

$$\overline{1b} + \overline{cd} = \overline{1fg}$$

روشن می شود که $c = 8$ یا $c = 9$ (در غیر این صورت، از مجموع عددهای دورقمی، به عدد سه رقمی نمی رسیم). اگر $c = 8$ ، آن وقت

$$\overline{1b} + \overline{8d} = \overline{18y} \quad \text{یا} \quad \overline{1b} + \overline{8d} = \overline{1f8}$$

زیرا، با پذیرفتن $c = 8$ ، عدد ۸ یکی از عضوهای مجموعه $\{e, f, g\}$ می شود. ولی حالت اول، یعنی $f = 8$ پذیرفتنی نیست، زیرا مقدار سمت

راست برابری از مقدار سمت چپ آن بیشتر می‌شود. از حالت دوم ممکن است به دست آید $f = 0$ و، برای b ، دو جواب به دست می‌آید:

$$10 + 99 = 109 \text{ و } 19 + 90 = 109$$

درضمن، در حالت دوم، ممکن است داشته باشیم: $f = 1$ ؛ ولی در این صورت، به ازای هیچ مقداری از $b, d \in \{1, 9\}$ ، برابری برقرار نمی‌شود. اکنون $a \neq 1$ و $b = 1$ می‌گیریم؛ در این صورت، از برابری

$$\overline{a1} + \overline{cd} = \overline{1fg}$$

معلوم می‌شود که $d \neq 9$ ، زیرا به ازای $d = 9$ به دست می‌آید $g = 0$ و، بنابراین، بنابر شرط دوم مساله، باید $a = 0$ یا $c = 0$ ، که ممکن نیست ($\overline{ab}$ و $\overline{cd}$ عددهای دورقمی‌اند) بنابراین $d < 9$ و

$$\overline{a1} + \overline{cd} = \overline{1d(d+1)}$$

زیرا $d \in \{1, f, d+1\}$ و $d \neq 1$ ؛ ولی

$$\{a, 1\} \cup \{c, d\} = \{1, d, d+1\}$$

و $a \neq 1$ پس یا

$$\overline{d1} + \overline{(d+1)d} = \overline{1d(d+1)},$$

$$\overline{(d+1)1} + \overline{dd} = \overline{d(d+1)} \quad \text{یا}$$

و یا

$$\overline{(d+1)1} + \overline{(d+1)d} = \overline{1d(d+1)}$$

در ضمن، دوبرابری اول، با شرط $d + (d + 1) = 10 + d$ ، یعنی به ازای $d = 9$ برقرارند، در حالی که $d < 9$ ، ولی برابری سوم، به ازای $d = 8$ برقرار است و جواب دیگری برای مساله به دست می آید:

$$91 + 98 = 189$$

در حالت های $c = 1$ و یا $d = 1$ ، نقش a و c یا b و d ، با هم عوض می شود و به همان پاسخ ها می رسیم.

پاسخ. دستگاهی که در صورت مساله داده شده است ۶ جواب دارد:

$$۱) 10 + 99 = 109; \quad ۲) 99 + 10 = 109;$$

$$۳) 19 + 90 = 109; \quad ۴) 90 + 19 = 109;$$

$$۵) 91 + 98 = 189; \quad ۶) 98 + 91 = 189$$

۹۳. باتوجه به صورت مساله، عددهای x و y ، دو رقمی اند (چون در آن ها، صحبت از مجموع رقم ها رفته است)؛ ولی z می تواند یک رقمی باشد. a و b را رقم های عدد x می گیریم:

$$x = 10a + b$$

پس $y = a + b$ و چون y هم دورقمی است، پس

$$z = a + b - 9$$

و باتوجه به شرط دیگر مساله، باید داشته باشیم:

$$(10a + b) + (a + b) + (a + b - 9) = 60 \Rightarrow 4a + b = 23$$

که تنها به جواب $a = 4$ و $b = 7$ می رسد (چرا؟).

پاسخ. $x = 47$ ، $y = 11$ ، $z = 2$.

۴. توان

۹۴. نه! اگر $a = 0$ ، آنوقت a^0 بی معنی می شود: $a^0 = 1$ ، به شرطی که $a \neq 0$ ؛ همچنین $(x - 2)^0$ برابر است با ۱، به شرطی که x برابر ۲ نباشد.

(۲) نه! در حالت $a = b$ خواهیم داشت $a^n = b^n$ ؛ در ضمن، اگر a و b قرینه هم و n عددی زوج باشد، باز هم $a^n = b^n$ ، مثلاً

$$2^2 = (-2)^2 = 4$$

در حالت های دیگر a^n با b^n برابر نیست.

(۳) برای عددهای مثبت a و b ، وقتی $a > b$ ، به شرط $n \in \mathbb{N}$ ، داریم $a^n > b^n$ ؛ ولی اگر n عددی منفی باشد، آنوقت خواهیم داشت $a^n < b^n$. مثلاً اگر $a = 3$ ، $b = 2$ و $n = -1$ باشد:

$$a^n = 3^{-1} = \frac{1}{3}; \quad b^n = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

و روشن است که $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

(۴) نه! برای $x = 0$ و $x = 1$ داریم: $x^2 = x$ ؛
برای $x > 1$ داریم: $x^2 > x$.

برای $0 < x < 1$ داریم: $x^2 < x$ ، مثلاً به ازای $x = \frac{1}{4}$ ، داریم

$$x^2 = \frac{1}{16} \text{ و روشن است که } \frac{1}{16} < \frac{1}{4}$$

برای عددهای منفی x ، همیشه $x^2 > x$ ، زیرا در این حالت، x منفی و

x^2 مثبت است و عدد مثبت، همیشه از عدد منفی بزرگتر می شود.

بنابراین، وقتی $x^2 > x$ که یا x عددی منفی باشد و یا عددی مثبت و

بزرگتر از واحد.

$$۱) ۳^۲ \times ۹^{-۲} = ۳^۲ \times (۳^۲)^{-۲} = ۳^۲ \times ۳^{-۴} = ۳^۰ = ۱;$$

$$۲) ۲^{-۲}(۲^{-۲})^{-۲} = ۲^{-۲} \times ۲^۴ = ۲^۲ = ۴;$$

$$۳) \frac{۳^{-۵}}{۳^۲} : ۳^{-۷} = \frac{۱}{۳^۵ \times ۳^۲} : \frac{۱}{۳^۷} = \frac{۱}{۳^۷} \times ۳^۷ = \frac{۱}{۹};$$

$$۴) (۵^{-۵})^{-۱} \cdot \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲} : ۱۰^{-۵} = ۵^۵ \cdot ۲^۲ : \frac{۱}{۱۰^۵} =$$

$$= ۵^۵ \times ۲^۲ \times (۵ \times ۲)^۵ = ۵^۵ \times ۲^۲ \times ۵^۵ \times ۲^۵ = ۵^{۱۰} \times ۲^۷;$$

$$۵) (۳^{-۳})^{-۲} \cdot ۳^{-۵} \cdot ۲۷ = ۳^۶ \times ۳^{-۵} \times ۳^۲ = ۳^۳ = ۲۷;$$

$$۶) ۴^{-۶} \cdot ۲۵۶^۲ \cdot ۲^۲ = ۴^{-۶} \times (۴^۴)^۲ \times (۲^۲)^۲ =$$

$$= ۴^{-۶} \times ۴^۸ \times ۴^۲ = ۴^۴ = ۲۵۶$$

$$۱) ۷^{m+۲} = ۷^۱ \Rightarrow m + ۲ = ۱ \Rightarrow m = -۱;$$

$$۲) ۵^{m+۳} = ۵^{-۱} \Rightarrow m + ۳ = -۱ \Rightarrow m = -۴;$$

$$۳) ۱۱^{۲m-۳} = ۱۱^۱ \Rightarrow ۲m - ۳ = ۱ \Rightarrow m = ۲;$$

$$۴) ۹^m = ۳^{۲m} \text{ و } ۲m - ۵ = ۱ \Rightarrow m = ۳;$$

$$۵) ۳^{m+۲} = ۳^۷ \Rightarrow m + ۲ = ۷ \Rightarrow m = ۵;$$

$$۶) ۲^{-۱} \times ۲^m = ۲^{m-۱} \text{ و } ۴ \times ۲^m = ۸ \times ۲^{m-۱}$$

بنابراین، برابری به این صورت در می‌آید:

$$۲^{m-۱} + ۸ \times ۲^{m-۱} = ۹ \times ۲^۵$$

از آنجا، با جمع دوجمله سمت چپ برابری

$$9 \times 2^{m-1} = 9 \times 2^5 \Rightarrow 2^{m-1} = 2^5 \Rightarrow m-1 = 5 \Rightarrow m = 6$$

۹۷. یا $m = 0$ که، در این صورت، $a^m = b^m = 1$ یا $a = b$ و m برابر عددی دلخواه.

۹۸.

$$۱) (2^7 a^7 b^7 c)(3ab^5) = 81a^7 b^7 c;$$

$$۲) \frac{x^{12} y^5 t^7}{x^5 y^7 t} = x^{12-5} y^{5-7} t^{7-1} = x^7 y^{-2} t^6;$$

$$۳) (2p^7 q^7 s^{12})^5 = 2^5 p^{7 \times 5} q^{7 \times 5} s^{12 \times 5} = 32p^{35} s^{60}.$$

۹۹.

$$۱) \frac{1}{x^5} = x^{-5}; \quad ۲) 0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2};$$

$$۳) 0.000001 = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}; \quad ۴) \frac{1}{5} = 5^{-1};$$

$$۵) \frac{1}{a} = a^{-1}; \quad ۶) \frac{2}{5} = 2 \times 5^{-1};$$

$$۷) \frac{a}{a+b} = a(a+b)^{-1};$$

$$۸) \frac{3a^7 b^7}{cd^7} = 3a^7 b^7 c^{-1} d^{-7}$$

۱۰۰.

$$۱) 3^{-2} \times 5^{-2} \times 2^7 = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{5^2} \times 2^7 =$$

$$= \frac{2^7}{3^2 \times 5^2} = \frac{128}{9 \times 25} = \frac{128}{225};$$

$$2) a^r b^{-1} = a^r \cdot \frac{1}{b} = \frac{a^r}{b};$$

$$3) \frac{a^{-1} \cdot b}{c^{-1} d} = \frac{\frac{1}{a} \cdot b}{\frac{1}{c} \cdot d} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{d}{c}} = \frac{bc}{ad};$$

(۱.۱۰۱)

۶۸۷۹۶	۲	$68796 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 13$
۳۴۳۹۸	۲	
۱۷۱۹۹	۳	
۵۷۳۳	۳	
۱۹۱۱	۳	
۶۳۷	۷	
۹۱	۷	
۱۳	۱۳	
۱		

$$2) 8024 = 2^3 \times 17 \times 59;$$

$$3) 510510 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$$

۱۰۲. باتوجه به معیارهای بخش‌پذیری، عدد ۹۷۱، بر ۲، ۳، ۵ و ۱۱ بخش‌پذیر نیست. با تقسیم مستقیم معلوم می‌شود که بر ۷ و بر ۱۳ هم بخش‌پذیر نیست. بازهم با تقسیم مستقیم، روشن می‌شود که عدد ۹۷۱، بر ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹ و ۳۱ هم بخش‌پذیر نیست. درضمن، در تقسیم بر ۳۱، به خارج قسمت ۳۱ و باقی‌مانده ۱۰ می‌رسیم:

$$971 = 31 \times 31 + 10$$

بنابراین، عدد ۹۷۱، نه بر عددی کوچکتر از ۳۱ و نه بر عددی بزرگتر از ۳۱ بخش‌پذیر نیست. اگر ۹۷۱، بر عددی بزرگتر از ۳۱ بخش‌پذیر باشد، آن وقت، خارج قسمت، عددی کوچکتر از ۳۱ می‌شود که باید ۹۷۱ بر آن بخش‌پذیر باشد، درحالی‌که روشن کردیم بر عددی کوچکتر از ۳۱ بخش‌پذیر نیست.

۱۰۳. باید عددها را به صورت ضرب توان‌های عددهای اول تجزیه کرد؛ آن وقت، بزرگترین بخش‌یاب مشترک عبارت است از حاصل ضرب همه عامل‌های مشترک دو عدد. یعنی باید عامل‌های با پایه مشترک و نمای کوچکتر را در نظر گرفت.

برای کوچکترین مضرب مشترک، باید پایه‌های مشترک را با نمای بزرگتر و هم همه عامل‌های غیرمشترک را در هم ضرب کرد:

$$۱) ۳۶ = ۲^2 \times 3^2 \text{ و } ۶۰ = ۲^2 \times 3 \times 5$$

$$\text{بزرگترین بخش‌یاب مشترک} = ۲^2 \times 3 = ۱۲$$

$$\text{کوچکترین مضرب مشترک} = ۲^2 \times 3^2 \times 5 = ۱۸۰$$

$$۲) ۲۵ = 5^2, ۳۵ = 5 \times 7;$$

$$\text{بزرگترین بخش‌یاب مشترک} = 5;$$

$$\text{کوچکترین مضرب مشترک} = 5^2 \times 7 = ۱۷۵;$$

$$۳) ۸۰ = ۲^4 \times 5 \text{ و } ۵۶ = ۲^2 \times 7;$$

$$\text{و } ۲^2 = ۸ \text{ بزرگترین بخش‌یاب مشترک}$$

$$\text{کوچکترین مضرب مشترک} = ۲^4 \times 5 \times 7 = ۵۶۰;$$

$$۴) ۱۶۹۲ = ۲^2 \times 3^2 \times ۴۷ \text{ و } ۵۷۶ = ۲^6 \times 3^2;$$

$$\text{بزرگترین بخش‌یاب مشترک} = ۲^2 \times 3^2 = ۴ \times ۹ = ۳۶;$$

$$\text{کوچکترین مضرب مشترک} = ۲^6 \times 3^2 \times ۴۷ = ۲۷۰۷۲;$$

$$۵) ۲۷۷۲ = ۲^۲ \times ۳ \times ۷ \times ۱۱$$

$$۶۲۸۳۲ = ۲^۲ \times ۳ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۷$$

$$\text{بزرگترین بخش‌یاب مشترک} = ۲^۲ \times ۳ \times ۷ \times ۱۱ = ۹۲۴,$$

$$\text{کوچکترین مضرب مشترک} = ۲^۴ \times ۳ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۷ = ۶۲۸۳۲$$

۱۰۴. p و q را دو عدد اول می‌گیریم. اگر عدد موردنظر، به صورت $p \cdot q$ باشد، دارای چهار مقسوم‌علیه است:

$$۱, p, q, pq$$

و اگر به صورت $p^۲q$ باشد، شش مقسوم‌علیه دارد:

$$۱, p, q, p^۲, pq, p^۲q$$

بنابراین، عدد موردنظر ما، تنها یک عامل اول دارد، ولی اگر به صورت $p^۲$ باشد، دارای سه مقسوم‌علیه $(۱, p, p^۲)$ ، اگر به صورت $p^۳$ باشد، دارای چهار مقسوم‌علیه $(۱, p, p^۲, p^۳)$ است و تنها وقتی پنج مقسوم‌علیه (و فقط پنج مقسوم‌علیه) دارد که به صورت $p^۴$ باشد:

$$۱, p, p^۲, p^۳, p^۴$$

بنابراین، عدد سه‌رقمی، توان چهارم یک عدد اول است.

پاسخ. مساله تنها یک جواب دارد: $۵^۴ = ۶۲۵$.

۱۰۵. توان‌های پشت‌سرهم عدد ۹ را در نظر می‌گیریم:

$$۹^۱ = ۹, ۹^۲ = ۸۱, ۹^۳ = ۷۲۹, ۹^۴ = \dots$$

رقم سمت راست حاصل توان‌ها را، نمایان‌تر نشان داده‌ایم. به سادگی می‌بینیم، اگر نما عدد ۹ فرد باشد، حاصل توان به ۹ ختم می‌شود و اگر نما عددی

زوج باشد، حاصل توان به ۱ ختم می‌شود:

$$9^{2k} = \dots 1 \text{ و } 9^{2k+1} = \dots 9 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

9^1 عدد فردی است و، بنابراین، عدد 9^1 به رقم ۱ ختم می‌شود.

۱۰۶. شبیه مسأله قبل است. فقط در این جا با حالت‌های بیشتری

سروکار داریم. توان‌های پشت سرهم ۷ را آزمایش می‌کنیم:

$$7^1 = 7, 7^2 = 49, 7^3 = 343, 7^4 = 2401$$

از این بعد، همین چهار رقم ۷، ۹، ۳ و ۱ مرتباً تکرار می‌شود. نتیجه این آزمایش را، می‌توان به این صورت تنظیم کرد: برای رقم سمت راست عدد 7^m ($m \in \mathbb{N}$) می‌توان گفت:

(۱) اگر $m = 4k + 1$ (یعنی عدد m در تقسیم بر ۴، به باقی‌مانده ۱ برسد)، عدد 7^m به ۷ ختم می‌شود؛

(۲) اگر $m = 4k + 2$ (در تقسیم m بر ۴، باقی‌مانده برابر ۲ شود)، رقم سمت راست عدد 7^m برابر ۹ است؛

(۳) اگر $m = 4k + 3$ (از تقسیم عدد m بر ۴، باقی‌مانده‌ای برابر ۳ به دست آید)، عدد 7^m بر ۳ ختم می‌شود؛

(۴) و سرانجام، اگر $m = 4k$ (یعنی m بر ۴ بخش‌پذیر باشد)، رقم سمت راست عدد 7^m برابر ۱ می‌شود.

در مسأله داریم $m = 7^y$. پس باید ببینیم از تقسیم عدد 7^y بر ۴، چه باقی‌مانده‌ای به دست می‌آید؛ یعنی عدد 7^y ، کدام حالت از حالت‌های

$$4k + 1, 4k + 2, 4k + 3, 4k$$

می‌تواند باشد؟

7^v عددی فرد است، پس یا به صورت $4k + 1$ است و یا به صورت $4k + 3$.

اگر به این نکته‌ها توجه کنیم، حل مسأله بسیار ساده می‌شود.
 الف) وقتی بخواهیم باقی‌مانده حاصل از تقسیم، مثلاً عدد 1374^{101} را بر یک عدد مثلاً ۱۱ پیدا کنیم، می‌توان باقی‌مانده حاصل از تقسیم پایه، یعنی 1374 بر ۱۱ را پیدا کرد.

$$1374 = 124 \times 11 + 10 \quad (1)$$

آن وقت، به جای 1374^{101} ، عدد 10^{101} را در نظر گرفت.
 ب) رابطه (۱)، یعنی رابطه تقسیم را می‌توان این طور نوشت:

$$1374 = 125 \times 11 - 1$$

یعنی اگر، یک واحد به خارج قسمت اضافه کنیم، به باقی‌مانده منفی ۱ - می‌رسیم و، بنابراین، باید باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد

$$(-1)^{101} = -1$$

بر ۱۱ را پیدا کنیم که همان ۱ - می‌شود. و اگر به باقی‌مانده مثبت برگردیم، معلوم می‌شود، باقی‌مانده حاصل از تقسیم 1374^{101} بر ۱۱ برابر است با ۱۰.

به مسأله خودمان برگردیم. باید باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد 7^v را بر ۴ پیدا کنیم. داریم

$$7 = 1 \times 4 + 3 = 2 \times 4 - 1$$

پس باید باقی‌مانده حاصل از تقسیم $7^v (-1)^v$ را بر ۴ پیدا کنیم (به جای باقی‌مانده ۳، باقی‌مانده ساده‌تر ۱ - را در نظر گرفتیم). ولی $7^v (-1)^v$ برابر

است با ۱-، یعنی از تقسیم $۷^۷$ بر ۴، به باقی مانده ۱- یا ۳ می‌رسیم: عدد $۷^۷$ به صورت $۴k + ۳$ درآمد و، بنابراین، عدد $۷^۷$ به رقم ۳ ختم می‌شود. ۱۰۷. در مسأله قبل، روش کار را آموختیم. عدد ۹۰۱ را بر ۳۱ تقسیم می‌کنیم و باقی مانده تقسیم را به دست می‌آوریم:

$$۹۰۱ = ۲۹ \times ۳۱ + ۲$$

بنابراین، باید باقی مانده حاصل از تقسیم عدد $۲^{۱۳۷۴}$ بر ۳۱ را پیدا کرد. به ترتیب داریم:

$$۲^{۱۳۷۴} = ۲^{۱۳۷۰+۴} = ۲^۴(۲^۵)^{۲۷۴} = ۱۶ \times ۳۲^{۲۷۴}$$

ولی عدد ۳۲ در تقسیم بر ۳۱ به باقی مانده‌ای برابر ۱ می‌رسد. پس باید باقی مانده حاصل از تقسیم عدد

$$۱۶ \times ۱^{۲۷۴} = ۱۶$$

را بر ۳۱ به دست آورد که برابر همان ۱۶ می‌شود.

۱۰۸. وقتی عددی را بر ۶ تقسیم کنیم، ممکن است به یکی از این ۶ باقی مانده برسیم:

$$۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$$

یعنی هر عدد طبیعی را می‌توان به یکی از این ۶ گونه نوشت.

$$۶k, ۶k + ۱, ۶k + ۲, ۶k + ۳, ۶k + ۴, ۶k + ۵$$

عدهای به صورت $۶k, ۶k + ۲, ۶k + ۳, ۶k + ۴$ و $۶k + ۱$ نمی‌توانند اول باشند: $۶k$ بر ۶ بخش پذیر است؛ $۶k + ۲$ بر ۲، $۶k + ۳$ بر ۳ و $۶k + ۴$ بر ۲.

دو حالت باقی می ماند: $6k+1$ و $6k+5$ که ممکن است اول باشند. اما به جای باقی مانده ۵، می توان -1 را در نظر گرفت (حل مسأله ۱۰۶ را ببینید)، بنابراین، هر عدد اول یا به صورت $6k+1$ است و یا به صورت $6k-1$. مثلاً عددهای اول ۱۳، ۱۹، ۴۳، ۱۰۳ به صورت $6k+1$ هستند؟

$$13 = 6 \times 2 + 1; \quad 19 = 6 \times 3 + 1; \quad 43 = 6 \times 7 + 1;$$

$$103 = 6 \times 17 + 1$$

و عددهای اول ۱۱، ۱۷، ۴۱ و ۱۰۱ به صورت $6k-1$:

$$11 = 6 \times 2 - 1; \quad 17 = 6 \times 3 - 1; \quad 41 = 6 \times 7 - 1;$$

$$101 = 6 \times 17 - 1$$

ولی عکس این حکم درست نیست، عدد ۲۵، عددی اول نیست، در حالی که به صورت $6k+1$ است:

$$25 = 6 \times 4 + 1$$

عدد ۷۷ اول نیست، در حالی که به صورت $6k-1$ است:

$$77 = 6 \times 13 - 1$$

۱۰۹. در مسأله ۱۰۸، دیدیم که عدد اول p به یکی از دو صورت $6k+1$ یا $6k-1$ است.

(۱) اگر $p = 6k+1$ آن وقت

$$p+5 = 6k+6 = 6(k+1)$$

که بر ۶ بخش پذیر است:

(۲) اگر $p = 6k - 1$ ، آنوقت

$$p + 5 = 6k + 4 = 2(3k + 2)$$

که بر ۲ بخش پذیر است.

اگر عدد اول ۲ را کنار بگذاریم، همه عددهای اول فردند و، بنابراین:
اگر با عدد فردی مثل ۵ جمع شوند، عددی زوج به دست می آید که اول نیست. برای عدد اول ۲، مجموع $2 + 5$ ، یعنی ۷ اول است، ولی $2 + 10$ ، یعنی ۱۲ اول نیست.

۱۱۰. یک عدد طبیعی، می تواند به یکی از این سه صورت باشد:

$$2k, 3k + 1, 3k + 2$$

اگر عدد اول p به صورت $3k + 1$ باشد:

$$p = 3k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(مثل ۷ یا ۱۳ یا ۱۹ و غیره)، به دست می آید:

$$p + 14 = 3k + 15 = 3(k + 5)$$

که بر ۳ بخش پذیر است و اول نیست.

اگر عدد اول p به صورت $3k + 2$ باشد (مثل ۱۱، ۱۷، ۲۳ و غیره)، آنوقت

$$p + 10 = 3k + 12 = 3(k + 4)$$

که اول نیست (بر ۳ بخش پذیر است).

پس هر عدد به صورت $3k + 1$ یا $3k + 2$ نمی‌تواند جواب مساله باشد؛
تنها می‌ماند، عدد اول به صورت $3k$. ولی $3k$ ، تنها به‌ازای $k = 1$ ، عددی
اول است: $p = 3$ که در این صورت، دو عدد

$$p + 10 = 13 \text{ و } p + 14 = 17$$

هم، عددهایی اول می‌شوند.

پاسخ. مساله تنها یک جواب دارد: $p = 3$.

۱۱۱. به ترتیب داریم:

$$A > (2 \times 5) \times 10 \times 11 \times 12 \times \dots \times 20 = A'$$

اگر به جای 2×5 ، برابر آن ۱۰ را در نظر بگیریم، در A' ، درست ۱۲ عامل
وجود دارد که دوتا از آن‌ها برابر ۱۰ و بقیه بزرگتر از ۱۰ هستند، پس

$$A > A' > 10^{12} \Rightarrow A > 10^{12}$$

در مجموع B ، یک میلیون جمله وجود دارد که، جز جمله آخر، همه از یک
میلیون کوچکترند، یعنی اگر همه جمله‌های جمع را برابر یک میلیون بگیریم،
داریم:

$$B < 10000000 \times 10000000 = 10^6 \times 10^6 = 10^{12}$$

$$A > 10^{12} \text{ و } B < 10^{12} \text{ پس } A > B.$$

۱۱۲. در این دنباله

$$\text{جمله اول} = 6 + 2; \quad \text{جمله دوم} = 6 \times 2 + 2;$$

$$\text{جمله سوم} = 6 \times 3 + 2; \dots; \quad \text{جمله } n\text{ام} = 6n + 2$$

جمله m ام را، به طور معمول با u_n نشان می دهیم:

$$u_n = 6n + 2$$

چون $6n$ بر ۳ بخش پذیر است، پس هر جمله این دنباله، در تقسیم بر ۳، باید باقی مانده‌ای برابر ۲ داشته باشد.

اکنون A را عددی طبیعی می گیریم. اگر a بر ۳ بخش پذیر نباشد، در تقسیم بر ۳، باقی مانده‌ای برابر ۱ یا ۲ - (همان ۲) پیدا می کند، بنابراین باقی مانده عدد به صورت a^2 ، a^4 یا a^6 (یا هر توان زوجی از a) بر ۳، برابر $(\pm 1)^2$ ، یعنی ۱ می شود.

به این ترتیب، هیچ توان زوجی از یک عدد طبیعی در بین جمله های دنباله پیدا نمی شود: هر توان زوجی در تقسیم بر ۳ به باقی مانده ۱ می رسد، در حالی که از تقسیم هر جمله دنباله بر ۳، باقی مانده‌ای برابر ۲ به دست می آید. ولی توان های فرد، در بین جمله های دنباله وجود دارد:

$$u_1 = 8 = 2^3; u_5 = 32 = 2^5; u_{21} = 2^7$$

یادداشت. اگر $n = \frac{2^{2m} - 1}{3}$ فرض کنیم، آن وقت.

$$u_n = 2^{2m+1}$$

مثلاً با فرض $m = 4$ ، به دست می آید:

$$n = \frac{2^8 - 1}{3} = \frac{255}{3} = 85 \text{ و } u_{85} = 2^9$$

یعنی جمله هشتاد و پنجم دنباله ما، برابر $2^9 = 512$ است. و یا به ازای $m = 5$ داریم

$$n = \frac{2^{10} - 1}{3} = \frac{1023}{3} = 341, u_{341} = 2^{11}$$

۱۱۳. کوچکترین عدد اول برابر است با ۲، بنابراین، عدد مفروض نمی‌تواند از ۱۰ (یعنی ۵ برابر ۲) کمتر باشد. ۱۰ عددی اول نیست، ۱۱ را هم نمی‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت، زیرا

$$۱۱ = ۲ + ۹ = ۳ + ۸ = ۴ + ۷ = ۵ + ۶$$

کوچکترین عدد اول موردنظر مساله، برابر است با ۱۳، زیرا

$$۱۳ = ۲ + ۱۱ = ۳ + ۳ + ۷ = ۲ + ۲ + ۲ + ۷ = ۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۵$$

ولی اگر بخواهیم، جمله‌های جمع باهم متفاوت باشند، عدد موردنظر ما، نمی‌تواند از

$$۲ + ۳ + ۵ + ۷ + ۱۱ = ۲۸$$

کمتر باشد، ۲۹ پاسخ مساله نیست، زیرا مثلاً به مجموع دو عدد اول قابل‌تبدیل نیست. ۳۱ جواب نیست؛ آن را می‌توان به مجموع ۲، ۳ و ۴ عدد اول تبدیل کرد:

$$۳۱ = ۲ + ۲۹ = ۷ + ۱۱ + ۱۳ = ۲ + ۵ + ۱۱ + ۱۳$$

ولی به مجموع ۵ عدد اول تبدیل نمی‌شود.

۳۷، مثلاً به مجموع دو عدد اول قابل‌تبدیل نیست. ۴۱ را هم نمی‌توان به مجموع دو عدد اول تبدیل کرد. ولی برای ۴۳ داریم:

$$\begin{aligned} ۴۳ &= ۲ + ۴۱ = ۷ + ۱۷ + ۱۹ = ۲ + ۵ + ۱۷ + ۱۹ = \\ &= ۳ + ۵ + ۷ + ۱۱ + ۱۷ \end{aligned}$$

۱۱۴. باقی‌مانده حاصل از تقسیم عددهای ۵۵۵۵ و ۲۲۲۲ بر ۷، به‌ترتیب، برابر است با ۴ و ۳:

$$۵۵۵۵ = ۷ \times ۷۹۳ + ۴; ۲۲۲۲ = ۷ \times ۳۱۷ + ۳$$

بنابراین، باید ثابت کنیم، عدد

$$4222 + 3555$$

بر ۷ بخش پذیر است. این عدد را می توان این طور نوشت:

$$(4^2)^{1111} + (3^5)^{1111} = 16^{1111} + 343^{1111}$$

از تقسیم ۱۶ بر ۷ به باقی مانده ۲ و از تقسیم ۳۴۳ بر ۷ به باقی مانده ۲-
(یا ۵) می رسیم. پس باید باقی مانده حاصل از تقسیم عدد

$$2^{1111} + (-2)^{1111} = 2^{1111} - 2^{1111} = 0$$

را بر ۷ پیدا کرد که برابر صفر است.

۱۱۵. روشن است که $243^{11} < 242^{11}$ ولی

$$243^{11} = (3^5)^{11} = 3^{55}$$

ولی $56 < 55$ و $56 = 4 \times 14$ ، پس

$$3^{55} < 3^{4 \times 14} = (3^4)^{14} = 81^{14}$$

و چون $81 < 83$ ، پس $81^{14} < 83^{14}$

اگر همه این ها را ردیف کنیم، به دست می آید:

$$242^{11} < 3^{55} < 3^{56} = 81^{14} < 83^{14}$$

یعنی $242^{11} < 83^{14}$.

۱۱۶. عددهایی که در تقسیم بر ۷ به باقی مانده ۵ می رسند، دنباله ای

بی پایان را تشکیل می دهند:

$$5, 12, 19, 26, 33, 40, 47, 54, \dots$$

در این دنباله، ۵۴، نخستین عددی است که در تقسیم بر ۱۳، باقی مانده‌ای برابر ۲ دارد و، در ضمن، جزو عددهایی است که در تقسیم بر ۷، به باقی مانده ۵ می‌رسد:

$$۵۴ = ۷ \times ۷ + ۵; \quad ۵۴ = ۱۳ \times ۴ + ۲$$

همین عدد ۵۴، در تقسیم بر ۹۱ (۷×۱۳) خارج‌قسمتی برابر صفر و باقی‌مانده‌ای برابر ۵۴ دارد. اگر بخواهیم، عددهایی را پیدا کنیم که در تقسیم بر ۹۱، خارج‌قسمتی مخالف صفر داشته باشند، می‌توانیم مضربی از ۹۱ (یعنی ۱۳×۷) را به ۵۴ اضافه کنیم:

$$۹۱ + ۵۴ = ۱۴۵; \quad ۲ \times ۹۱ + ۵۴ = ۲۳۶;$$

$$۳ \times ۹۱ + ۵۴ = ۳۲۷; \dots$$

اگر n را عددی طبیعی فرض کنیم، صورت کلی این عددها، چنین است:

$$۹۱n - ۳۷ \text{ یا } ۹۱n + ۵۴ \quad (n \in \mathbb{N})$$

پاسخ. اگر عددی در تقسیم بر ۷ و ۱۳، به ترتیب، باقی‌مانده‌های برابر ۵ و ۲ داشته باشد، در تقسیم بر ۷×۱۳ ، یعنی ۹۱، باقی‌مانده‌ای برابر ۵۴ پیدا می‌کند. مجموعه این عددها، که مجموعه‌ای بی‌پایان است، چنین است:

$$\{۵۴, ۱۴۵, ۲۳۶, ۳۲۷, ۴۱۸, ۵۰۹, ۶۰۰, \dots\}$$

یادداشت. عدد n باید به صورت $۷k + ۵$ و $۱۳m + ۲$ باشد (k و m

عددهایی طبیعی‌اند). پس

$$۷k + ۵ = ۱۳m + ۲ \Rightarrow k = \frac{۱۳m - ۳}{۷}$$

و اگر $۱۳m$ را $۱۴m - m$ در نظر بگیریم:

$$k = ۲m - \frac{m + ۳}{۷}$$

چون k عددی طبیعی است، پس $m + ۳$ باید بر ۷ بخش پذیر باشد، یعنی باید داشته باشیم:

$$m = ۷n - ۳$$

که در این صورت به دست می آید:

$$k = ۱۳n - ۶ \quad (n \in \mathbb{N})$$

که اگر مقدار m را در عبارت $۱۳m + ۲$ یا مقدار k را در عبارت $۷k + ۵$ قرار دهیم، در هر دو حالت، به یک نتیجه می رسیم:

$$۹۱n - ۳۷$$

۱۱۷. در مسأله ۱۱۶ دیدیم، برای این که عدد طبیعی N ، در تقسیم بر ۷ به باقی مانده ۵ و در تقسیم بر ۱۳ به باقی مانده ۲ برسد، باید به این صورت باشد:

$$N = ۹۱n - ۳۷ \quad (n \in \mathbb{N})$$

در این جا، در ضمن می خواهیم، در تقسیم N بر ۱۷ ، باقی مانده ای برابر ۱ به دست آید:

$$N = ۱۷p + ۱ \quad (p \in \mathbb{N})$$

یعنی باید داشته باشیم:

$$۱۷p + ۱ = ۹۱n - ۳۷ \Rightarrow p = \frac{۹۱n - ۳۸}{۱۷}$$

و یا $p = 5n - 2 + \frac{6n - 4}{17}$ باید $4 - 6n$ بر ۱۷ بخش پذیر باشد،

$$6n - 4 = 17q (q \in \mathbb{N}) \Rightarrow n = \frac{17q + 4}{6} =$$

$$= 2q - \frac{q - 4}{6} \quad (q \in \mathbb{N})$$

کوچکترین عددی که می توان به جای q قرار داد تا n ، عددی طبیعی باشد، عبارت است از $q = 4$ که در این صورت به دست می آید:

$$n = 12 \text{ و } p = 62$$

و از آن جا، کوچکترین مقدار N پیدا می شود:

$$N = 91n - 37 = 91 \times 12 - 37 = 1055;$$

$$N = 17p + 1 = 17 \times 62 + 1 = 1055$$

۱۰۵۵ کوچکترین عددی است که در تقسیم بر عددهای ۷ و ۱۳ و ۱۷، به ترتیب، باقی مانده هایی برابر ۵ و ۲ و ۱ می دهد.

برای پیدا کردن، عددهای دیگری که دارای ویژگی این عدد باشند، باید مضربی از $17 \times 13 \times 7$ ، یعنی مضربی از ۱۵۴۷ را به آن اضافه کرد. بنابراین، مجموعه عددهای دارای ویژگی عدد N ، چنین است:

$$\{x | x = 1547k + 1055, k \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \{1055, 2602, 4149, 5696, \dots\}$$

۱۱۸. به ترتیب داریم:

$$8^9 = (2^3)^9 = 2^{27} = (2^9)^3 = 512^3 =$$

$$= (2 \times 256)^3 > (2 \times 243)^3 = (2 \times 3^5)^3 =$$

$$= 8 \times 3^{15} > 3 \times 3^{15} = 3^{16} = (3^2)^8 = 9^8$$

به این ترتیب $9^8 > 8^9$.

۱۱۹. این قضیه، یعنی بی پایان بودن مجموعه عددهای اول را، اقلیدس، صدها سال پیش از میلاد ثابت کرد.

اقلیدس، اثبات را با برهان خُلف می دهد، یعنی ثابت می کند، اگر فرض کنیم، تعداد عددهای اول، محدود است، به تناقض می رسیم. اگر تعداد عددهای اول، محدود باشد، به معنای آن است که، در مجموعه عددهای اول، یکی از عددها، از همه دیگران بزرگتر است و عدد اولی بزرگتر از آن وجود ندارد.

این بزرگترین عدد اول را p می نامیم و عدد زیر را در نظر می گیریم:

$$A = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times p) + 1$$

عدد A تشکیل شده است از مجموع عدد ۱ با حاصل ضرب همه عددهای اول (از ۲ که کوچکترین عدد اول است تا p که، طبق فرض ما، بزرگترین عدد اول است). عدد A ، بر هیچ یک از عددهای اول داخل پرانتز بخش پذیر نیست و در تقسیم بر هر کدام از آنها، به باقی مانده ۱ می رسد. پس یا عدد A عددی است اول و یا بر عدد اولی بزرگتر از p بخش پذیر است. هر کدام از این دو حالت را بپذیریم، به معنای این است که عدد اولی بزرگتر از p وجود دارد؛ چیزی که فرض ما را نقض می کند.

۱۲۰. در ریاضیات نمی توان و نباید همیشه منتظر یک پاسخ قاطع بود. ریاضیات، به قول گالیله، زبان طبیعت است. چه در طبیعت و چه در زندگی، هر نتیجه گیری، مبتنی بر عامل هایی است که، با تاثیر خود، موجب آن نتیجه می شوند. اگر در یک یا چند عامل، تغییر حاصل شود، نمی توان منتظر بود که نتیجه تغییر نکند. مسأله ۱۲۰ را این طور طرح می کنیم تا مطلب روشن تر شود:

در یک منبع ۱۰۰۰ لیتر و در منبع دوم ۸۰۰ لیتر آب وجود دارد. از منبع

اول ساعتی ۱۰۰ لیتر و از منبع دوم ساعتی ۵۰ لیتر آب برمی دارند. مقدار آب باقی مانده در دو منبع را، بعد از x ساعت، باهم مقایسه کنید.

بعد از x ساعت، در منبع اول $(۱۰۰۰ - ۱۰۰x)$ لیتر و، در منبع دوم $(۸۰۰ - ۵۰x)$ لیتر آب باقی می ماند و باید این دو مقدار را باهم مقایسه کنیم (که همان مسأله ۱۲۰ است). در جدول زیر، همه چیز روشن است:

x	$۱۰۰۰ - ۱۰۰x$	$۸۰۰ - ۵۰x$
۱	۹۰۰	۷۵۰
۲	۸۰۰	۷۰۰
۳	۷۰۰	۶۵۰
۴	۶۰۰	۶۰۰
۵	۵۰۰	۵۵۰
۶	۴۰۰	۵۰۰

جدول نشان می دهد، اگر x برابر ۱ یا ۲ یا ۳ ساعت باشد، آن وقت مقدار آب منبع اول بیشتر از مقدار آب منبع دوم است.

اگر x را برابر ۴ ساعت بگیریم، آن وقت مقدار آب دو منبع، باهم برابرند.

از ساعت چهارم به بعد، مقدار آب منبع دوم از مقدار آب منبع اول بیشتر می شود.

بنابراین، به پرسش مسأله ۱۲۰، باید این طور پاسخ داد:

(۱) به ازای $x < ۴$ (یا دقیق تر، به ازای $۰ < x < ۴$):

$$۱۰۰۰ - ۱۰۰x > ۸۰۰ - ۵۰x$$

$$(۲) \text{ به ازای } x = ۴$$

$$۱۰۰۰ - ۱۰۰x = ۸۰۰ - ۵۰x$$

$$(۳) \text{ برای } x > ۴$$

$$۱۰۰۰ - ۱۰۰x < ۸۰۰ - ۵۰x$$

(و اگر مساله به صورت دو منبع آب مطرح شده باشد، باید این نکته را هم به حل مساله اضافه کنیم که، بعد از ۱۰ ساعت آب منبع اول، و بعد از ۱۶ ساعت، آب منبع دوم تمام می شود).

a. مجموعه عددهای گویا

۱۲۱. هردو کسر، هنوز ساده می شوند:

$$۱) \frac{۱۰۲}{۱۸۷} = \frac{۶ \times ۱۷}{۱۱ \times ۱۷} = \frac{۶}{۱۱};$$

$$۲) \frac{۵۲}{۹۱} = \frac{۱۳ \times ۴}{۱۳ \times ۷} = \frac{۴}{۷}$$

۱۲۲. راههای ساده تر، در این جا مشخص شده است:

$$۱) ۷۸ \frac{۵}{۶} + ۲۴ \frac{۳}{۴} = ۱۰۲ \frac{۱۰ + ۹}{۱۲} = ۱۰۲ \frac{۱۹}{۱۲} = ۱۰۳ \frac{۷}{۱۲};$$

$$۲) ۹۷ \frac{۵}{۶} - ۳۲ \frac{۷}{۹} = ۶۵ \frac{۱۵ - ۱۴}{۱۸} = ۳۵ \frac{۱}{۱۸};$$

$$۳) ۵ \frac{۱۷}{۲۴} \times ۳ = ۱۵ \frac{۱۷}{۸} = ۱۷ \frac{۱}{۸};$$

(درواقع، $۵ \frac{۱۷}{۲۴}$ یعنی $۵ + \frac{۱۷}{۲۴}$ هر عدد را جداگانه در ۳ ضرب کردیم).

$$۴) ۱۸ \frac{۳}{۵} : ۲ = ۹ \frac{۳}{۱۰}$$

(ابتدا ۱۸ و بعد $\frac{۳}{۵}$ را بر ۲ تقسیم کردیم).

$$۵) \frac{۵}{۱۸} + \frac{۱۱}{۲۴} = \frac{۲۰ + ۳۳}{۷۲} = \frac{۵۳}{۷۲}$$

(در صورت مساله، به جای پیدا کردن کوچکترین مخرج مشترک، مخرج ها را درهم ضرب کرده است).

۶) بعد از تجنيس، به ضرب $\frac{56}{27} \times \frac{243}{14}$ رسيديم که صورت و مخرج قابل ساده شدن است: 243 و 27 به 27 ساده می شود و 56 و 14 به 14 ؛ و اين ضرب به صورت $\frac{4}{1} \times \frac{9}{1}$ ، يعنی 36 درمی آيد.

123 . $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ را به يك مخرج تبديل و، بعد، صورت و مخرج هر کدام را 16 برابر می کنيم:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{32}{96}; \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{48}{96}$$

بين 32 و 48 ، درست 15 عدد طبيعي قرار دارد و، بنابر اين، 15 کسری که مقدار آنها بين $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ باشد، چنين اند:

$$\frac{33}{96}, \frac{34}{96}, \frac{35}{96}, \dots, \frac{45}{96}, \frac{46}{96}, \frac{47}{96}$$

که البته، برخی از آنها ساده می شوند.

می توانستيم، بدون تبديل به يك مخرج، عمل کنيم:

$$\frac{1}{3} = \frac{16}{48}; \frac{1}{2} = \frac{16}{32}$$

15 کسر بين $\frac{16}{48}$ و $\frac{16}{32}$ چنين اند:

$$\frac{16}{47}, \frac{16}{46}, \frac{16}{45}, \dots, \frac{16}{35}, \frac{16}{34}, \frac{16}{33}$$

و همچنين، چون $\frac{a+c}{b+d}$ ، مقداری بين دو مقدار $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ است، می توان پشت سرهم، کسرهای بينابینی را پيدا کرد. در اين جا، درست اول دو کسر $\frac{1}{3}$ و

$\frac{1}{3}$ و سپس، در سطرهای بعد، به ترتیب، کسرهای بینابینی داده شده است:

$$۱) \frac{1}{3}, \frac{1}{2};$$

$$۲) \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}$$

$$۳) \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2};$$

$$۴) \frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}$$

$$۵) \frac{1}{3}, \frac{5}{14}, \frac{4}{11}, \frac{7}{19}, \frac{3}{8}, \frac{8}{21}, \frac{5}{13}, \frac{7}{18}, \frac{2}{5},$$

$$\frac{7}{17}, \frac{5}{12}, \frac{8}{19}, \frac{3}{7}, \frac{7}{16}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{1}{2}$$

در سطر پنجم، کسرها، به ترتیب صعودی (یعنی از کم به زیاد) آمده‌اند و درست ۱۵ عدد بین $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ واقع است.

یادداشت. ۱۵ عددی که در یکی از سه راه‌حل به دست آوریم، با ۱۵ عدد راه‌حل دیگر فرق دارد. در واقع، بین دو عدد گویای $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ ، بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد که، در هریک از راه‌حل‌ها، برخی از آن‌ها را نوشته‌ایم.

۱۲۴. a و $\frac{1}{a}$ عکس یکدیگرند و حاصل ضربی برابر واحد دارند:

$$a \times \frac{1}{a} = 1$$

بنابراین، اگر a عددی مثبت و بزرگتر از ۱ باشد، $\frac{1}{a}$ عددی مثبت و کوچکتر از ۱ می‌شود. در حالت منفی بودن a هم، می‌توان استدلال مشابهی داشت.

پاسخ مساله، مشروط است:

(۱) اگر $a = 1$ یا $a = -1$ ، آنوقت $a = \frac{1}{a}$ ؛

(۲) اگر $a > 1$ یا $-1 < a < 0$ ، آنوقت $a > \frac{1}{a}$ ؛

(۳) اگر $0 < a < 1$ یا $a < -1$ ، آنوقت $a < \frac{1}{a}$.

۱۲۷. (۱) $\frac{17}{18} > \frac{15}{28}$ (۱۷ به ۱۸ خیلی نزدیکتر است تا ۱۵ به ۲۸)؛

(۲) $\frac{7}{8} < \frac{5}{6}$ ، باید به صورت و مخرج کسر $\frac{5}{6}$ ، ۲ واحد اضافه کرد تا برابر

$\frac{7}{8}$ شود و ولی اگر به صورت و مخرج کسری که از واحد کوچکتر است، یک

مقدار اضافه کنیم، کسر بزرگتر می شود؛ (۳) $\frac{7}{12} < \frac{3}{8}$. ۳ از نصف ۸

کوچکتر و ۷ از نصف ۱۲ بزرگتر است؛ (۴) $\frac{3}{8} < \frac{5}{12}$. ۸ برابر $\frac{3}{8}$ یعنی

۳، از ۸ برابر $\frac{5}{12}$ یعنی $\frac{10}{3}$ کوچکتر است؛ (۵) $\frac{97}{91} < \frac{103}{97}$. کسر $\frac{97}{91}$

از واحد بزرگتر است. بنابراین، با اضافه شدن ۶ واحد به صورت و مخرج آن،

به واحد نزدیکتر، یعنی کوچکتر می شود.

۱۲۸.

$$168 \times \frac{7}{8} = 21 \times 7 = 147;$$

$$\frac{20}{27} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{9};$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{22}{25} \times \frac{5}{12} &= 2 \times \frac{5}{12} + \frac{22}{25} \times \frac{5}{12} = \\ &= \frac{5}{6} + \frac{11}{30} = \frac{25 + 11}{30} = \frac{36}{30} = 1 \frac{1}{5}; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$۱) ۱۹۵ : \frac{۱۳}{۱۵} = ۱۹۵ \times \frac{۱۵}{۱۳} = ۲۲۵,$$

$$۲) ۵۱ : \frac{۱۷}{۲۳} = ۵۱ \times \frac{۲۳}{۱۷} = ۶۹;$$

$$۳) ۴\frac{۱}{۶} : \frac{۵}{۱۲} = \frac{۲۵}{۶} \times \frac{۱۲}{۵} = ۱۰$$

۱۳۰. پاسخ: ۶۹۰ نفر

۱۳۱. پاسخ. ۱۸۲ کیلومتر. راهنمایی. ابتدا ببینید، هر قطار در یک

ساعت، چه کسری از فاصله بین دوشهر را طی می‌کند!

۱۳۲. قبل از آغاز عمل و حل تمرین‌ها، دقت کنید با چه عددهایی و با

چه عمل‌هایی سروکار دارید و این عمل را به چه راهی باید انجام دهید: کدام

عمل مقدم است و کدام عمل را باید برای مرحله بعدی نگاه داشت. در

این جا، پاسخ‌ها داده شده است:

$$۱) \left(۲۶\frac{۲}{۳} ; ۷\frac{۱}{۴} \right) (۳ ; ۵)$$

۱۳۳. برای ضرب یک عدد ده‌دهی در ۱۰^n ($n \in \mathbb{N}$)، باید ممیز را

n رقم به سمت راست منتقل کرد و برای تقسیم بر ۱۰^n باید ممیز را n رقم

به سمت چپ برد:

$$۰/۰۱۴ \times ۱۰۰ = ۱/۴; ۰/۰۱۴ : ۱۰۰ = ۰/۰۰۰۱۴$$

۱۳۴. وقتی مخرج کسر، تنها شامل توان‌هایی از عددهای اول ۲ یا

۵ باشد، می‌توان با ضرب صورت و مخرج در یک عدد مناسب، مخرج را

به شکل ۱۰^n درآورد:

$$\frac{۵}{۸} = \frac{۵}{۲^۳} = \frac{۵ \times ۵^۲}{۲^۳ \times ۵^۲} = \frac{۶۲۵}{۱۰^۳} = ۰/۶۲۵;$$

$$\frac{19}{25} = \frac{19}{5^2} = \frac{19 \times 2^2}{5^2 \times 2^2} = \frac{76}{10^2} = 0,76;$$

$$\frac{3}{40} = \frac{3 \times 25}{40 \times 25} = \frac{75}{1000} = 0,075;$$

$$\frac{6}{125} = \frac{6 \times 8}{125 \times 8} = \frac{48}{1000} = 0,048;$$

$$\frac{151}{10 \times 2^5} = \frac{151 \times 5^5}{10 \times 10^5} = \frac{371875}{10^6} = 0,371875;$$

$$\frac{312}{625} = \frac{312 \times 2^4}{5^4 \times 2^4} = \frac{4992}{10^4} = 0,4992$$

۱۳۵.

$$1) 1 : \frac{0,1 - 0,09}{0,6 - 0,58} = 1 : \frac{0,01}{0,02} = 1 : \frac{1}{2} = 2;$$

۲) پاسخ. ۱؛ ۳) پاسخ. ۱۰۴.

۱۳۶. پاسخ. ۹۹۰ کیلوگرم.

۱۳۷. طول هر گام کارگر بلند را واحد می‌گیریم. او در ۱۰۰ گام خود، ۱۰۰ واحد طول به جلو می‌رود، در همین مدت کارگر کوتاه ۲۰ + ۱۰۰، یعنی ۱۲۰ گام جلو می‌رود. ولی هرگام او ۸۰ درصد، یعنی ۰/۸ کارگر بلند طول دارد

$$120 \times 0,8 = 96$$

به این ترتیب، وقتی کارگر بلند ۱۰۰ واحد طول جلو می‌رود، کارگر کوتاه ۹۶ واحد طول می‌پیماید و ۴ واحد طول عقب می‌ماند.
پاسخ. کارگر بلند، زودتر به کارخانه می‌رسد.

۱۳۸. هر ۱۰۰ کیلوگرم، در زمان استخراج ۹۸ کیلوگرم زغال سنگ خالص دارد. ولی ۱۰۰ کیلوگرم، بعد از دو شبانه‌روز ۸۸ کیلوگرم زغال

خالص دارد (از ۱۰۰ کیلوگرم، ۱۲ کیلوگرم آن، آب است.) به این ترتیب، بعد از آن که زغال، دو شبانه روز در هوای آزاد باشد، هر ۸۸ کیلوگرم خالص آن ۱۰۰ کیلوگرم وزن دارد. باید بینیم ۹۸ کیلوگرم زغال سنگ خالص، چقدر وزن دارد:

$$\frac{۸۸}{۹۸} \quad \frac{۱۰۰}{?} \quad ? = \frac{۹۸ \times ۱۰۰}{۸۸} \approx ۱۱۱$$

پاسخ. بعد از دو شبانه روز، به هر ۱۰۰ کیلوگرم زغال سنگ استخراج شده، ۱۱ کیلوگرم اضافه می شود.

۱۳۹. ۱۰۰ سانتی متر مکعب آب، بعد از یخ بستن، ۱۰۹ سانتی متر مکعب حجم پیدا می کند یا، برعکس، هر ۱۰۹ سانتی متر مکعب یخ، به ۱۰۰ سانتی متر مکعب آب تبدیل می شود. باید بینیم هر ۱۰۰ سانتی متر مکعب یخ، به چند سانتی متر مکعب آب تبدیل می شود:

$$\frac{۱۰۹}{۱۰۰} \quad \frac{۱۰۰}{?} \quad ? = \frac{۱۰۰ \times ۱۰۰}{۱۰۹} \approx ۹۱/۷$$

پاسخ. ۸/۳٪ حجم یخ، بعد از آب شدن، کم می شود.

۱۴۰. پاسخ. چاپ سوم ارزان تر است. اگر هر جلد چاپ اول کتاب ۱۰۰ تومان قیمت داشته باشد، چاپ دوم آن ۱۲۰ تومان و چاپ سوم آن ۹۶ تومان خواهد بود.

یادداشت. پاسخ این مساله را می توان، بدون محاسبه داد. در چاپ دوم، هر واحد قیمت چاپ اول افزایش می یابد و به ۱/۲ واحد تبدیل می شود و در چاپ سوم از این ۱/۲ واحد ۲۰٪ کم می شود و روشن است که ۲۰ درصد ۱/۲ از ۲۰ درصد واحد بیشتر است.

۱۴۱. پاسخ: ۷۹٪.

۱۴۲. نه! فرض کنید، تعداد مسافرها ۱۰۰ نفر باشند! از این ۱۰۰ نفر ۷۰ نفر ایرانی و ۷۰ نفر مردند. ولی از این ۷۰ مرد، می‌تواند ۳۰ نفر غیرایرانی باشد و تنها ۴۰ نفر ایرانی.

۱۴۳. اگر بخواهیم بدانیم، عدد a ، چند درصد عدد b است، بهترین و ساده‌ترین روش، استفاده از دستور زیر است:

$$\frac{a \times 100}{b}$$

$$۱) \frac{۲۵ \times ۱۰۰}{۳۷۵} = \frac{۱۰۰}{۱۵} = \% \frac{۲۰}{۳} \approx \% ۶,۷;$$

$$۲) \frac{\frac{۳}{۴} \times ۱۰۰}{۲۵۰} = \frac{۳۵ \times ۱۰۰}{۴ \times ۲۵۰} = \% ۳,۵;$$

$$۳) \frac{\frac{۳}{۸} \times ۱۰۰}{\frac{۵}{۷}} = \frac{۳ \times ۱۰۰ \times ۷}{۸ \times ۵} = \% ۵۲,۵;$$

$$۴) \frac{۰,۰۷ \times ۱۰۰}{۲,۵} = \frac{۷۰}{۲۵} = \% ۲,۸$$

۱۴۴. اگر جمعیت شهر در ۱۰ سال پیش ۱۰۰ باشد، جمعیت فعلی آن ۱۱۰ نفر می‌شود. به این ترتیب، ۱۱۰٪ جمعیت ۱۰ سال قبل این شهر برابر ۵۵۰۰۰ نفر است و در نتیجه، جمعیت ۱۰ سال قبل برابر است با

$$\frac{۵۵۰۰۰ \times ۱۰۰}{۱۱۰} = ۵۰۰۰۰$$

۱۴۵

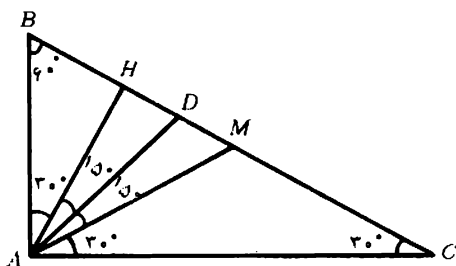
$$\text{عدد اول} = \frac{۲p}{۲+۳+۷} = \frac{۲p}{۱۲} = \frac{۱}{۶}p;$$

$$\text{عدد دوم} = \frac{3p}{2+3+7} = \frac{3p}{12} = \frac{1}{4}p;$$

$$\text{عدد سوم} = \frac{7p}{2+3+7} = \frac{7p}{12} = \frac{7}{12}p$$

درواقع، عدد اول به تقریب ۱۷٪، عدد دوم ۲۵٪ و عدد سوم به تقریب ۵۸٪ عدد p می‌شود.

۱۴۶. شکل ۳۸ همه چیز را روشن می‌کند. زاویه A ، چه از طرف ضلع



شکل ۳۸

کوچکتر و چه از طرف ضلع بزرگتر، به نسبت‌های ۳۰ : ۱۵ : ۱۵ : ۳۰ یا ساده‌تر به نسبت‌های

$$۲ : ۱ : ۱ : ۲$$

تقسیم شده‌است.

۱۴۷. مسافتی که پیاده در دو روز آخر پیموده‌است، به نسبت ۳ : ۲

بوده‌است، و چون این مسافت روی هم ۴۵ کیلومتر است پس

$$\text{برای روز چهارم} = \frac{3 \times 45}{3+2} = ۲۷ \text{ (کیلومتر)};$$

$$\text{برای روز پنجم} = \frac{2 \times 45}{3+2} = ۱۸ \text{ (کیلومتر)}$$

از نسبت‌های فرض، معلوم می‌شود که، روز اول، به‌اندازه روز پنجم، روز دوم به‌اندازه سه‌برابر روز پنجم و روز سوم به‌اندازه دوبرابر روز پنجم راه رفته‌است.

پاسخ. ۱۵۳ کیلومتر.

۱۴۸. پاسخ. $\frac{4}{5}$ (نسبت حجم ظرف کوچکتر به حجم ظرف بزرگتر).

۱۴۹. پاسخ. ۸ : ۱۵ : ۱۲.

۱۵۰. پاسخ. همان ۹۷٪.

۱۵۱. عدد اول را a و عدد دوم را b می‌گیریم. بنابر فرض مساله، باید

۴۰٪ از عدد a با ۶۰٪ از عدد b برابر باشد، یعنی

$$0.4a = 0.6b$$

با این برابر می‌توان یک تناسب درست کرد و نسبت دو عدد a و b را به‌دست آورد:

$$\frac{a}{b} = \frac{0.6}{0.4} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$

بنابراین، باید ۱۲۰ را به‌نسبت ۲ : ۳ تقسیم کنیم.

پاسخ. عدد اول ۷۲ و عدد دوم ۴۸.

۱۵۲. راهنمایی. عدد دوم برابر عدد اول است.

پاسخ. ۰۰٪.

۱۵۳. نه! اگر دو مربع را با ضلع‌های a و b بگیریم، نسبت ضلع‌ها

برابر $\frac{a}{b}$ و نسبت مساحت‌ها برابر $\frac{a^2}{b^2}$ ولی $\frac{a}{b}$ با $\frac{a^2}{b^2}$ (در حالت کلی) برابر

نیست، یعنی اگر $a \neq b$ ، آن وقت، برای به‌دست آوردن نسبت $\frac{a^2}{b^2}$ باید در

نسبت $\frac{a}{b}$ ، صورت را در a و مخرج را در b (یعنی در دو عدد مختلف)

ضرب کرد که، در نتیجه، با کسر $\frac{a}{b}$ برابر در نمی‌آید.

۱۵۴. اگر طول ضلع مربع را a بگیریم. بعد از آن که ۲۰٪ بزرگ شود، برابر $۱/۲a$ می‌شود. چون مساحت مربع با مجذور کردن طول ضلع آن به دست می‌آید، مساحت مربع اصلی برابر a^2 و مساحت مربع بزرگ شده برابر

$$۱/۲a \times ۱/۲a = ۱/۴۴a^2$$

می‌شود. یعنی مساحت مربع $۱/۴۴$ برابر شده است، یا به زبان دیگر، ۴۴٪ به مساحت آن اضافه شده است.

۱۵۵. اگر عدد دوم را a بگیریم، عدد اول برابر $۱/۲۵a$ می‌شود. اکنون عدد دوم را با عدد اول مقایسه می‌کنیم (عدد اول را ۱۰۰٪ به حساب می‌آوریم):

$$\frac{a \times ۱۰۰\%}{۱/۲۵} = ۸۰\%$$

یعنی عدد دوم، ۲۰٪ از عدد اول کوچکتر است.

۱۵۶. پاسخ $۴/۵$ کیلومتر در ساعت.

۱۵۷. ۱) از قانون تفضیل نسبت‌ها در مخرج استفاده می‌کنیم:

$$\frac{۵+x}{(۵+x)-(۲+x)} = \frac{۴}{۴-۳} \Rightarrow \frac{۵+x}{۳} = \frac{۴}{۱} \Rightarrow \\ \Rightarrow ۵+x = ۱۲ \Rightarrow x = ۷;$$

$$۲) \frac{(۹+x)-x}{x} = \frac{۴-۱}{۱} \Rightarrow \frac{۹}{x} = ۳ \Rightarrow x = ۳;$$

$$۳) \frac{(۱۰-x)+x}{x} = \frac{۴+۱}{۱} \Rightarrow \frac{۱۰}{x} = ۵ \Rightarrow x = ۲;$$

$$۴) \frac{(a+x)-x}{x} = \frac{(a+۱)-۱}{۱} \Rightarrow \frac{a}{x} = a \Rightarrow x = ۱;$$

$$۵) \frac{(a-x)+x}{x} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$$

۱۵۸. (۱) $\frac{x+y}{y} = \frac{۲+۳}{۳}$ یا $\frac{۵}{۳} = \frac{۱۰}{۶}$ ؛ از آنجا به دست می‌آید $y = ۶$ و سپس $x = ۴$ ؛

(۲) $\frac{x}{y} = \frac{۵}{۳}$ ، پس $\frac{x-y}{y} = \frac{۵-۳}{۳}$ و یا $\frac{۲}{۳} = \frac{۶}{۹}$ ، از اینجا $y = ۹$ و سپس $x = ۱۵$ ؛

(۳) پاسخ. $y = \frac{(a+b)b}{۲a+b}$ و $x = \frac{۲a(a+b)}{۲a+b}$ ؛

(۴) پاسخ. $y = \frac{a(a-b)}{b}$ و $x = \frac{۲ab + a(a-b)}{b}$.

۱۵۹. با انجام عمل ترکیب نسبت‌ها در صورت و تفضیل نسبت‌ها در

مخرج:

$$\frac{(am - bn) + (am + bn)}{(am + bn) - (am - bn)} = \frac{۱ + ۱۱}{۱۱ - ۱}؛$$

از اینجا به تناسب $\frac{am}{bn} = \frac{۶}{۵}$ می‌رسیم و در نتیجه

$$\frac{a}{b} = \frac{۶}{۵} : \frac{m}{n} = \frac{۶}{۵} : \frac{۳}{۲} = \frac{۶}{۵} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۵}$$

۱۶۰. $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} = k$ می‌گیریم. دوطرف برابری را در k ضرب (و یا

بر k تقسیم) می‌کنیم

$$\frac{a}{b} \cdot k = \frac{c}{d} \cdot k \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q}؛$$

$$\frac{a}{b} : k = \frac{c}{d} : k \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{m} = \frac{c}{d} \cdot \frac{q}{p}$$

۱۶۱. دو تناسب را، جمله به جمله، درهم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۶}{۵} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{۴}{۵} \text{ یا } \frac{z}{x} = \frac{۵}{۴}$$

۱۶۲. با ضرب و تقسیم تناسب‌های مفروض به دست می‌آید.

$$\frac{aa_1}{bb_1} = \frac{1}{6}; \frac{a}{a_1} : \frac{b}{b_1} = \frac{3}{2}$$

۱۶۳. درواقع، باید عدد ۳۸۴۰ را به نسبت $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{7}$ تقسیم کنیم.
پاسخ. ۲۰۴۸ و ۱۷۹۲

۱۶۴. پیش از پاسخ به پرسش مساله، به دو نکته اشاره می‌کنیم.
(۱) دستور محاسبه دقیق حجم مخروط ناقص یا هرم ناقص، این است:

$$V = (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) \cdot \frac{h}{3} \quad (2)$$

(۲) اگر دو عدد مثبت a و b را در نظر بگیریم، همیشه میانگین حسابی آنها، یعنی $\frac{a+b}{2}$ ، از میانگین هندسی آنها بزرگتر است، مگر وقتی که دو عدد a و b باهم برابر باشند. به زبان دیگر در حالت $a \neq b$:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} \quad (4)$$

در حالت $a = b$ ، $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ ، زیرا

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a+a}{2} = a \text{ و } \sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a$$

مثلاً میانگین حسابی دو عدد ۲ و ۸ برابر $\frac{2+8}{2}$ ، یعنی ۵، و میانگین هندسی آنها برابر $\sqrt{2 \times 8}$ ، یعنی ۴ است. در این جا، میانگین حسابی، ۲۵٪ از میانگین هندسی بزرگتر است:

$$4 + 0.25 \times 4 = 4 + 1 = 5$$

اگر دو عدد را از هم دورتر کنیم و مثلاً ۱ و ۹ بگیریم، میانگین حسابی آنها برابر ۵ و میانگین هندسی آنها برابر ۳ می‌شود و میانگین حسابی به تقریب ۶۷٪ از میانگین هندسی بزرگتر است:

$$3 \times 0.67 \approx 2; 2 + 3 = 5$$

و اگر دو عدد را ۵/۹ و ۵/۰ بگیریم (که میانگین حسابی آنها برابر ۵ است)، دارای میانگین هندسی ۱۸/۲ می‌شوند و میانگین حسابی نزدیک به ۱۳۰٪ از میانگین هندسی بزرگتر است:

$$2/18 \times 1/3 \approx 2/83; 2/18 + 2/83 \approx 5$$

(۳) اگر در دستور (۲)، به جای $\sqrt{S_1 S_2}$ (میانگین هندسی مساحت‌های دو قاعده مضبوط یا هرم ناقص)، میانگین حسابی آن، یعنی $\frac{S_1 + S_2}{2}$ را قرار دهیم، به همان دستور (۱)، در صورت مساله، می‌رسیم:

$$\begin{aligned} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) \cdot \frac{h}{3} &= \\ = (S_1 + \frac{S_1 + S_2}{2} + S_2) \cdot \frac{h}{3} &= \\ = \frac{3(S_1 + S_2)}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot h \end{aligned}$$

به این ترتیب، دستور (۱) تنها وقتی دقیق است که میانگین حسابی و هندسی مساحت‌های دو قاعده، با هم برابر باشند، یعنی در حالتی که، دو قاعده مساحت‌هایی برابر داشته باشند؛ به زبان دیگر، وقتی که با استوانه یا منشور قائم سروکار داشته باشیم.

هرچه مقدار مساحت‌های دو قاعده از هم دورتر باشند، دستور (۱) تقریبی‌تر و در برخی موردها اشتباه می‌شود. مثلاً، اگر مساحت قاعده بالا

را صفر بگیریم (یعنی با مخروط یا هرم سروکار داشته باشیم)، نتیجه به کلی دور از واقعیت می‌شود: حجم مخروط یا هرم، برابر است با $\frac{1}{3}$ حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع، ولی بنابر دستور (۱)، برابر $\frac{1}{4}$ حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع می‌شود.

باوجود این، در موردهای عملی، که نیازی به دقت کامل ریاضی نیست و درضمن، مساحت‌های دو قاعده مخروط یا هرم ناقص، خیلی ازهم دور نیستند، می‌توان، به جای دستور پیچیده‌تر (۲)، از دستور (۱) استفاده کرد. به این مساله توجه کنید: حجم هرم ناقصی را محاسبه کنید که ارتفاعی برابر ۳ دارد و مساحت‌های دو قاعده آن به ترتیب برابر ۳ و ۱ است. ابتدا حجم دقیق‌تر هرم ناقص را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V &= \frac{h}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) = \\ &= \frac{3}{3}(3 + \sqrt{3} + 1) \approx 5,732 \end{aligned}$$

اکنون، اگر حجم همین هرم ناقص را به کمک دستور (۱) پیدا کنیم:

$$V \approx \frac{S_1 S_2}{2} \cdot h = \frac{3+1}{2} \times 3 = 6$$

و این نتیجه، قریب ۵٪ از مقدار واقعی بیشتر است.

می‌بینید، حتی دراین مورد، که مساحت‌های دو قاعده، اختلاف زیادی با یکدیگر دارند (قاعده بزرگتر، سه برابر قاعده کوچکتر، مساحت دارد)، بازهم درعمل و وقتی مقادارهای تقریبی برای ما کافی باشد، جوابی که به کمک دستور (۱) به دست آمده است، پذیرفتنی است. و روشن است که هرچه، نسبت مساحت‌های دو قاعده، به واحد نزدیکتر باشد، جواب‌ها به هم نزدیکتر می‌شوند.

یادداشت. در خیلی موردها، می‌توان به‌کمک قضیه‌ها و دستورهایی که در هندسه مسطحه وجود دارد، قضیه‌ها و دستورهای مشابهی در هندسه فضائی پیدا کرد. ولی باید توجه داشت که رفتن از صفحه به فضا، اغلب کیفیت کار را عوض می‌کند و نمی‌توان با سهل‌اندیشی، دستورها و قضیه‌هایی را در هندسه فضائی (در شباهت با هندسه مسطحه) جعل کرد.

دستور (۱) که در صورت مسأله ۱۶۴ داده شده‌است، نوعی شباهت با دستوری در هندسه مسطحه دارد و دستور هندسه مسطحه مربوط به محاسبه مساحت ذوزنقه است (که در شباهت با هندسه فضائی می‌توان آن را مثلث ناقص نامید)! اگر دو قاعده ذوزنقه را با طول‌های a و b فرض کنیم، مساحت آن از دستور

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

(h ارتفاع ذوزنقه است) به‌دست می‌آید. ولی این دستور، در هندسه مسطحه، در هر حالتی ($a \neq b$ یا $a = b$ یا $b = 0$) درست است، درحالی‌که در مشابه فضایی آن [دستور (۱)] چنین نیست.

۱۶۵. پاسخ‌ها

$$\frac{2}{5} = 0/4; 1\frac{1}{3} = 1/(3); \frac{74}{25} = 2/96;$$

$$\frac{8}{9} = 0/(8); \frac{2}{11} = 0/(18); \frac{1}{7} = 0/(142857);$$

$$\frac{4}{7} = 0/(571428); \frac{1}{13} = 0/(076923);$$

$$\frac{5}{13} = 0/(384615); \frac{7}{15} = 0/4(6);$$

$$\frac{1}{12} = 0/08(3)$$

$$۰/۱۲۵ = \frac{۱۲۵}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۸}; ۱/۴۸۴ = ۱\frac{۱۲۱}{۲۵۰};$$

$$۰/(۳۹) = \frac{۳۹}{۹۹} = \frac{۱۳}{۳۳}; ۱/(۷۸۳) = ۱\frac{۷۸۳}{۹۹۹} =$$

$$۱\frac{۸۷}{۱۱۱} = ۱\frac{۲۹}{۳۷} = \frac{۶۶}{۳۷};$$

$$۰/(۱۸۵) = \frac{۱۸۵}{۹۹۹} = \frac{۵ \times ۳۷}{۲۷ \times ۳۷} = \frac{۵}{۲۷};$$

$$۰/۲(۷) = \frac{۲۷-۲}{۹۰} = \frac{۲۵}{۹۰} = \frac{۵}{۱۸};$$

$$۴/۳(۲۷) = ۴\frac{۳۲۷-۳}{۹۹۰} = ۴\frac{۳۲۴}{۹۹۰} = ۴\frac{۱۸}{۵۵};$$

$$۰/۱۵(۳) = \frac{۱۵۳-۱۵}{۹۰۰} = \frac{۱۳۸}{۹۰۰} = \frac{۲۳}{۱۵۰};$$

$$۰/(۹) = ۰/۹۹۹\dots = \frac{۹}{۹} = ۱$$

$$۰/۲(۹) = \frac{۲۹-۲}{۹۰} = \frac{۲۷}{۹۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

یادداشت. هر کسر دهمی ساده را می‌توان به صورت یک کسر دوره‌ای (با دوره گردش ۰ یا ۹). نوشت مثلاً

$$۲/۳ = ۲/۳۰۰۰\dots = ۲/۳(۰);$$

$$۲/۳ = ۲/۲۹۹۹\dots = ۲/۲(۹)$$

۱۶۷. در تقسیم یک عدد بر p ، چون باقی‌مانده تقسیم باید از p کوچکتر باشد، تنها یکی از عددهای

$$۱, ۲, ۳, ۴, \dots, p-۱ \quad (۲)$$

می‌تواند در باقی‌مانده ظاهر شود، یعنی اگر عمل تقسیم را تا $p - 1$ رقم دنبال کنیم، به‌ناچار، یکی از همین عددهای دنباله (۱)، دوباره در باقی‌مانده ظاهر می‌شود. به این ترتیب، حداکثر تعداد رقم‌های دوره گردش برای $\frac{1}{p}$ ؛ (عددی اول است) برابر است با $p - 1$. مثلاً

$$\frac{1}{7} = 0/(142857) \quad (\text{رقم } 6)$$

$$\frac{1}{17} = 0/(0588235294117647) \quad (\text{رقم } 16)$$

ولی معمولاً، تعداد رقم‌های دوره گردش، از $p - 1$ کمتر است:

$$\frac{1}{3} = 0/(3) \quad (\text{یک رقم به جای دورقم})$$

$$\frac{1}{11} = 0/(09) \quad (\text{دورقم به جای } 10 \text{ رقم})$$

$$\frac{1}{31} = 0/(03225806451612) \quad (\text{رقم } 10 \text{ به جای } 30 \text{ رقم})$$

ولی ثابت می‌کنند که تعداد رقم‌های دوره گردش، همیشه مقسوم‌علیهی از $p - 1$ است. برای $p = 13$ ، تعداد رقم‌های دوره گردش برابر ۶ (مقسوم‌علیهی از ۱۲) و برای $p = 31$ ، تعداد رقم‌های دوره گردش، برابر ۱۰ (مقسوم‌علیهی از ۳۰) شده است

۱۶۸. ۱) فرض می‌کنیم بخواهیم کسر دوره‌ای ساده $0/(63)$ را به کسر متعارف تبدیل کنیم، مقدار عدد را x می‌گیریم:

$$x = 0/636363... \quad (1)$$

دوطرف رابطه (۱) را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم (یعنی 10^2 ، و ۲ تعداد رقم‌های دوره گردش است):

$$100x = 63/6363... \quad (2)$$

برابری (۱) را از برابری (۲) کم می‌کنیم:

$$99x = 63 \Rightarrow x = \frac{63}{99}$$

در حالت کلی، عدد دهدهی دوره‌ای را $\overline{abc \dots d} / 0$ و تعداد رقم‌های دوره‌گردش آن را n می‌گیریم. اگر عدد را x بنامیم:

$$x = 0 / (\overline{abc \dots d})$$

و دو طرف برابری را در 10^n ضرب کنیم:

$$10^n x = \overline{abc \dots d} / (\overline{abc \dots d})$$

با کم کردن مقدار x از این برابری به دست می‌آید.

$$(10^n - 1)x = \overline{abc \dots d}$$

از طرف دیگر

$$10^n - 1 = 999 \dots 9 \quad (n \text{ رقم})$$

بنابراین

$$x = \frac{\overline{abc \dots d}}{999 \dots 9}$$

(۲) کسر دوره‌ای مرکب $25(27) / 0$ را در نظر می‌گیریم و آن را x می‌نامیم،

داریم:

$$100x = 25 / (27);$$

$$10000x = 2527 / (27);$$

$$10000x - 100x = 2527 - 25;$$

$$x = \frac{2527 - 25}{9900} = \frac{139}{550}$$

در حالت کلی، اگر تعداد رقم‌های غیر گردش برابر n و تعداد رقم‌های گردش برابر m ، باشد، با فرض برابر بودن عدد با x ، تفاضل

$$10^{m+n}x - 10^n x$$

را محاسبه می‌کنیم و از آنجا x را به دست می‌آوریم.
مثلاً در کسر دهدهی $0/18(63)$ داریم $m = n = 2$.
به ترتیب محاسبه می‌کنیم:

$$x = 0/18(63);$$

$$10000x = 1863/(63);$$

$$100x = 18/(63)$$

$$9900x = 1863 - 18;$$

$$x = \frac{1845}{9900} = \frac{41}{220}$$

۶. مجموعه عددهای حقیقی

$$169. \text{ پاسخ. } N \subset Z \subset Q \subset R$$

۱۷۰. پاسخ. (۱ گنگ، (۲ گنگ، (۳ گنگ، (۴ گویا ($\sqrt{9}$) برابر ۳ و $\sqrt{4}$ برابر ۲ و $\sqrt{9} - \sqrt{4}$ برابر ۱ است؛ (۴ گنگ (حاصل عبارت، برابر $(1 - \sqrt{2})$ می‌شود؛ (۶ گویا؛ (۷ گنگ.

۱۷۱. عدد π تا ۱۴ رقم بعد از ممیز چنین است:

$$\pi = 3/14159263358979...$$

بنابراین، عددهای گویای زیر، بین $3/14$ و π قرار دارند:

$$3/141, 3/1415, 3/14159, 3/141592,$$

$$3/1415926, 3/14159263,$$

$$3/141592633, 3/1415926335,$$

$$3/14159263358, 3/141592633589,$$

$$3/1415926335897$$

۱۷۲. $\sqrt{2}$ از ۴۱۴/۵ بزرگتر است، زیرا مقدار $\sqrt{2}$ ، تا پنج رقم بعد از ممیز چنین است:

$$\sqrt{2} = 1/41421\dots$$

بنابراین عدد $\frac{1/414 + \sqrt{2}}{2}$ ، که عددی گنگ است، بین عدد گویای ۴۱۴/۱ و عدد گنگ $\sqrt{2}$ قرار دارد:

$$1/414 < \frac{1/414 + \sqrt{2}}{2} < \sqrt{2}$$

۱۷۳. پاسخ. (۱) اگر کسرها مثبت باشند، آن که صورتش بزرگتر است؛ اگر هردو کسر منفی باشند، آن که صورتش کوچکتر است؛ و اگر یکی از کسرها منفی و دیگری مثبت باشد، آن که مثبت است؛
(۲) اگر هردو کسر مثبت باشند، آن که مخرج کوچکتر دارد. اگر هردو کسر منفی باشند، آن که مخرج بزرگتر دارد و اگر از دو کسر، یکی مثبت و دیگری منفی است آن که مثبت است؛
(۳) آن که قدرمطلق بزرگتر دارد؛
(۴) آن که قدر مطلق کوچکتر دارد.

۱۷۴. توجه داشته باشید که $|a| = |-a|$. بنابراین، باید به این پرسش پاسخ داد که a بزرگتر یا $|a|$.

پاسخ. اگر $a \geq 0$ ، آن وقت $|a| = a$ ؛ اگر $a < 0$ ، آن وقت $|a| > a$.

۱۷۵. دو حالت در نظر می‌گیریم: (۱) a و b هم علامت‌اند. در این حالت، برای محاسبه $a + b$ ، باید قدرمطلق‌های a و b را با هم جمع و سپس، علامت a یا b را به آن داد. بنابراین، در این حالت

$$a \cdot b > 0 \Rightarrow |a + b| = |a| + |b|$$

(وقتی می‌نویسیم، $ab > 0$ ، به معنای آن است که a و b ، هم علامت‌اند).
 (۲) اگر a و b علامت‌های متفاوتی داشته باشند ($ab < 0$). آن وقت، برای محاسبه $a + b$ ، باید تفاضل قدرمطلق‌های دو عدد a و b را به دست آورد و، سپس علامت عددی را در نظر گرفت که قدرمطلق بزرگتر دارد. پس

$$ab < 0 \Rightarrow |a + b| < |a| + |b|$$

در حالتی هم که a یا b یا هر دو برابر صفر باشند، روشن است که

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow |a + b| = |a| + |b|$$

به این ترتیب، نابرابری زیر، همیشه درست است:

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

۱۷۶. با استدلالی شبیه تمرین قبل نتیجه می‌شود:

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

علامت برابری برای حالتی است که a و b هم علامت باشند، در ضمن $|a| > |b|$. در دیگر حالت‌ها، علامت نابرابری برقرار است.

۱۷۷. پاسخ. هر دو برابری درست‌اند: حاصل ضرب قدرمطلق‌ها با قدرمطلق حاصل ضرب و خارج قسمت قدرمطلق‌ها با قدرمطلق خارج قسمت برابر است.

۱۷۸. ۱ (۲؛ ۱) $\sqrt{۸۲}$ از ۹ بزرگتر و از ۱۰ کوچکتر است؛ (۳)

۱ - $(۲\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲۴}$ باهم برابرند؛ درضمن $۲\sqrt{۶}$ از ۵ کوچکتر است).

۱۷۹. طول ضلع‌های پهلوی زاویه قائمه را a و b می‌نامیم. در

این صورت: ۱) $a = ۱$ و $b = ۲$ (۲؛ $a = ۲$ و $b = ۳$ ؛ ۳) $a = ۱$

و $b = ۴$ (۴؛ $a = ۲$ و $b = ۶$ ؛ ۵) $a = ۲$ و $b = ۴$ ؛ ۶) $a = ۶$ و

$b = ۱۱$.

۱۸۰. ۱) $\sqrt{۷}$ ریشه‌ای از معادله $x^2 = ۷$ است؛ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ریشه

معادله $۵x^2 = ۵$ است؛ ۳) $۲\sqrt{۳}$ یکی از ریشه‌های معادله $x^2 = ۱۲$ است.

۴) فرض می‌کنیم $x = \sqrt{۳} - ۱$ ، دراین صورت

$$x + ۱ = \sqrt{۳} \Rightarrow (x + ۱)^2 = ۳$$

و این همان معادله‌ای است که یکی از ریشه‌های آن برابر $\sqrt{۳} - ۱$ است. معادله، بعد از ساده کردن، به این صورت درمی‌آید:

$$x^2 + ۲x = ۲$$

۵) شبیه ۴) عمل کنید. معادله‌ای که $\sqrt{۷} + ۲$ ، ریشه‌ای از آن است، به این صورت درمی‌آید:

$$(x - ۲)^2 = ۷ \Rightarrow x^2 - ۴x = ۳$$

۱۸۱. اگر طول یکی از ضلع‌های پهلوی زاویه قائمه، عددی زوج باشد،

به معنای آن است که طول یکی از ضلع‌های مثلث، عددی است بخش‌پذیر

بر ۲. ولی اگر طول هردو ضلع پهلوی زاویه قائمه، عددهایی فرد باشند،

به‌ناچار طول وتر مثلث، عددی زوج می‌شود (مجموع دو عدد فرد و یا مجموع

مجذوره‌های دو عدد فرد، برابر است با عددی زوج. درضمن، جنر عدد مجذور کامل زوج، عددی زوج است).

(۲) اگر یکی از ضلع‌های پهلوی زاویه قائمه، مضربی از ۳ باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. اگر هردو ضلع پهلوی زاویه قائمه بخش‌ناپذیر بر ۳ باشند، آن وقت باقی‌مانده حاصل از تقسیم مجذور طول هر ضلع پهلوی زاویه قائمه بر ۳، برابر ۱ می‌شود (عددی که بر ۳ بخش‌پذیر نیست، به صورت $3k + 1$ یا $3k - 1$ است که مجذور آن به صورت $9k^2 + 6k + 1$ درمی‌آید). در نتیجه از مجموع دو عددی که، هریک در تقسیم بر ۳ به باقی‌مانده ۱ می‌رسد، عددی به دست می‌آید که در تقسیم بر ۳، باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد. و چنین عددی (که باید برابر مجذور طول وتر باشد)، نمی‌تواند مجذور یک عدد درست باشد. زیرا دیدیم، هر مجذور کاملی، به شرط بخش‌ناپذیر بودن بر ۳، تنها می‌تواند به صورت $3k + 1$ باشد نه $3k + 2$.

به این ترتیب، اگر طول ضلع‌های پهلوی زاویه قائمه، هیچ‌کدام بر ۳ بخش‌پذیر نباشند، مثلث مفروض، فیثاغوری نخواهد بود (زیرا، برای طول وتر، عدد درستی به دست نمی‌آید).

بنابراین، به ناچار باید دست‌کم یکی از ضلع‌های پهلوی زاویه قائمه، طولی بخش‌پذیر بر ۳ داشته باشد.

(۳) هر عدد، ضمن تقسیم بر ۵، به صورت یکی از پنج حالت

$$5k; 5k \pm 1; 5k \pm 2$$

است. بنابراین، مجذور هر عدد، ضمن تقسیم بر ۵، تنها ۳ حالت پیدا می‌کند

$$5k \text{ یا } 5k \pm 1$$

اگر یکی از ضلع‌های پهلوی زاویه قائمه، مضربی از ۵ باشد، حکم مساله، به خودی خود ثابت است. فرض می‌کنیم، هیچ‌کدام از طول‌های

دو ضلع پهلوی زاویه قائمه، بر ۵ بخش پذیر نباشد، در این صورت، مجذور این دو طول، یکی از سه حالت را خواهند داشت:

اول. هردو به صورت $5k + 1$ باشند. ولی این ممکن نیست، زیرا مجموع آنها (یعنی مجذور وتر) به صورت $5k + 2$ درمی آید که برای هیچ عدد مجذور کاملی ممکن نیست.

دوم. هردو به صورت $5k - 1$ باشند که، باز هم شبیه حالت قبل، برای مجموع آنها، یک مجذور کامل به دست نمی آید.

سوم. تنها این حالت می ماند که مجذور طول های دو ضلع پهلوی زاویه قائمه، یکی به صورت $5k + 1$ و دیگری به صورت $5k - 1$ باشد که، در این صورت، مجموع آنها (یعنی مجذور وتر و در نتیجه، خود وتر) مضربی از ۵ خواهد بود.

۱۸۲. پاسخ.

$$۱) \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \quad (x \neq 0);$$

$$۲) \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \quad (x \neq 0);$$

$$۳) x - |x| = \begin{cases} 0 & (x \geq 0) \\ 2x & (x < 0) \end{cases};$$

$$۴) |x| + |x - 5| = \begin{cases} -2x + 5 & (x \leq 0) \\ 5 & (0 < x \leq 5) \\ 2x - 5 & (x > 5) \end{cases}$$

۱۸۳. ۱) اگر $x \geq 0$ ، آن وقت $|x| = x$ و معادله به صورت

$x - x = -2$ یا $0 = -2$ درمی آید که ممکن نیست. یعنی برای x ، جواب مثبت یا صفر وجود ندارد.

اگر $x < 0$ ، آن وقت $|x| = -x$ و معادله به صورت

$x - (-x) = -2$ یا $2x = -2$ یا $x = -1$ درمی‌آید. معادله یک جواب دارد: $x = -1$.

۲) وقتی $|x - 1|$ برابر ۴ باشد، خود $x - 1$ می‌تواند برابر ۴ و می‌تواند برابر -4 باشد.

اگر $x - 1 = 4$ ، آن وقت $x = 5$ ؛

اگر $x - 1 = -4$ ، آن وقت $x = -3$.

معادله دو جواب دارد: ۵ و -3 .

۳) پاسخ. معادله دو جواب دارد: $x = 1$ و $x = -2$.

۴) در این معادله $x \neq 3$ (مخرج، نمی‌تواند برابر صفر باشد). برای

$x > 3$ هم، معادله جواب ندارد، زیرا در این حالت $|x - 3| = x - 3$ و

کسر $\frac{x}{x-3}$ باید از ۱ بزرگتر باشد (وقتی $x > 3$ ، آن وقت x و $x - 3$ مقادارهایی مثبت‌اند و $x < x - 3$).

پس $x < 3$. در این صورت $|x - 3| = 3 - x$ و

$$\frac{x}{3-x} = 1 \Rightarrow x = 3 - x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

معادله تنها یک جواب دارد: $x = \frac{3}{2}$ ($\frac{3}{2}$ ، به این مناسبت قابل قبول است که از ۳ کوچکتر است و، در این حالت، فرض ما بر این بود که x کوچکتر از ۳ باشد).

۷. جمله و چندچندجمله‌ای

۱۸۴. پاسخ.

$$۱) -x + 1; \quad ۲) -3x^2 + 2x + 1; \quad ۳) 4x^2 - 6x;$$

۱۸۵. بهتر است، ابتدا پرانتز، بعد گروه و سرانجام ابرو را برداشت:

$$۱) -2n - \{-5n - [-8n - (5 - 3n)]\} =$$

$$\begin{aligned}
&= -2n - \{-5n - [-8n - 5 + 3n]\} = \\
&= -2n - \{-5n + 8n + 5 - 3n\} = \\
&= -2n + 5n - 8n - 5 + 3n = -2n - 5; \\
2) &4a^2b - \{ab^2 - [-5a^2b - (2ab^2 - 1)]\} = \\
&= 4a^2b - \{ab^2 - [-5a^2b - 2ab^2 + 1]\} = \\
&= 4a^2b - \{ab^2 + 5a^2b + 2ab^2 - 1\} = \\
&= 4a^2b - ab^2 - 5a^2b - 2ab^2 + 1 = -a^2b - 2ab^2 + 1
\end{aligned}$$

۱۸۶. پاسخ. $a(x^2 - 1) - (x^2 - 1)$

۱۸۷. داریم:

$$\begin{aligned}
F &= A - [B - 2A - A + B] = A - [2B - 3A] = \\
&= A - 2B + 3A = 4A - 2B
\end{aligned}$$

اکنون، به جای A و B ، مقدارشان را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
F &= 4(a^2 + 3ab + b^2) - 2(a^2 + 6ab - b^2) = \\
&= 4a^2 + 12ab + 4b^2 - 2a^2 - 12ab + 2b^2 = \\
&= 2a^2 + 6b^2
\end{aligned}$$

۱۸۸. اگر یک عدد فرد را $2k + 1$ بنامیم ($k \in \mathbb{Z}$)، عدد فرد پشت

سرآن، برابر $2k + 3$ می‌شود، مجموع آن‌ها چنین است

$$(2k + 1) + (2k + 3) = 4k + 4$$

که بخش‌پذیر بودن آن بر ۴، روشن است.

۱۸۹. عدد دورقمی را $\overline{ab}$ فرض می‌کنیم. با جابه‌جا کردن رقم‌های آن به عدد $\overline{ba}$ می‌رسیم. دراین صورت داریم:

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$

و این مجموع، به‌روشنی، بر ۱۱ بخش‌پذیر است؛ خارج‌قسمت برابر $a + b$ ، یعنی مجموع رقم‌های عدد دورقمی، می‌شود.

۱۹۰. $a - 2a = -a$ ، یعنی باید دو برابر عدد را، از خود عدد کم کنیم تا تفاضل برابر قرینه عدد بشود.

۱۹۱. قرینه -2 ، برابر ۲ و عکس $-\frac{1}{2}$ ، برابر -2 است و

$$2 + (-2) = 0$$

۱۹۲. باید $a + b$ عددی منفی باشد تا $-(a + b)$ مثبت شود و این، وقتی پیش می‌آید که یا هردو عدد a و b منفی باشند، و یا از دو عدد a و b ، آن که قدرمطلق بزرگتری دارد، منفی باشد. برای این‌که عدد $-(a + b)$ ، برابر صفر شود، باید a و b قرینه یکدیگر باشند: $a = -b$.

۱۹۳. یادآوری می‌کنیم، اول باید عمل‌های داخل پرانتز را انجام داد، سپس عمل‌های ضرب یا تقسیم و، سرانجام، عمل‌های جمع و تفریق.

$$\begin{aligned} 1) (x^2 - y^2) : x - y &= [(-2)^2 - 5^2] : (-2) - 5 = \\ &= (4 - 25) : (-2) - 5 = (-21) : (-2) - 5 = \\ &= \frac{21}{2} - 5 = 10\frac{1}{2} - 5 = 5\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$2) \left(3 : 11\frac{1}{2} \right) \left(4 : 7\frac{4}{5} \right) \cdot 3$$

$$\begin{aligned}
 ۱) \frac{\frac{۳}{۴} + ab - b^۲}{5a^۲ - ab} &= \frac{\frac{۳}{۴} + (-\frac{۱}{۲})(-۱) - (-۱)^۲}{5(-\frac{۱}{۲})^۲ - (-\frac{۱}{۲})(-۱)} = \\
 &= \frac{\frac{۳}{۴} + \frac{۱}{۲} - ۱}{-\frac{۵}{۸} - \frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۱}{۴}}{-\frac{۹}{۸}} = -\frac{۲}{۹};
 \end{aligned}$$

۲) پاسخ. $(۲ : ۳) \left(۳ : -\left(۳ \frac{۳}{۳۲} \right) \right) (۴ : ۳) (۱ : ۴) (۵ : ۸) \left(\frac{۱}{۴} : -\frac{۹۴}{۵۹۲۵} \right)$

$$\begin{aligned}
 ۶) \frac{a^۲}{a+۱} + \frac{a^۲}{a-۱} + \frac{۱}{a+۱} - \frac{۱}{a-۱} &= \\
 &= \frac{-\frac{۲۷}{۸}}{-\frac{۱}{۲}} + \frac{-\frac{۲۷}{۸}}{-\frac{۵}{۲}} + \frac{۱}{-\frac{۱}{۲}} - \frac{۱}{-\frac{۵}{۲}} = \\
 &= \frac{۲۷}{۴} + \frac{۲۷}{۲۰} - ۲ + \frac{۲}{۵} = ۶\frac{۱}{۲}
 \end{aligned}$$

۱۹۵. پاسخ ما. $(۱ : a^۲ + ۹b - c) (۲ : ۸a^۲ + ۹b - c) (۳ : -۱۵a^۲x^۶y^۵z)$

$(۴ : ۳xy^۲z^۲) (۵ : ۲y) (۶ : \frac{۵y}{x^۲}) (۷ : -۲۱a^۲b^۵c^۲) (۸ : -۸xz)$

$(۹ : a^۵b^۷) (۱۲ : x^۵y^۲)$

۱۹۶. چون

$$x^۲ \cdot (x^۲)^a \cdot x^a = x^۲ \cdot x^{۲a} \cdot x^a = x^{۳a+۲}$$

پس باید داشته باشیم: $x^{۳a+۲} = x^{۱۷}$ ، بنابراین $۳a + ۲ = ۱۷$ و $a = ۵$

یادداشت. جواب $a = 5$ به شرطی درست است که x ، برابر صفر یا ۱ یا -۱ نباشد.

در حالت $x = 0$ و $x = 1$ ، مقدار a می‌تواند هر عدد دلخواه باشد (زیرا، عدد صفر را به هر توانی برسانیم، برابر صفر؛ و عدد ۱ را به هر توانی برسانیم، برابر ۱ می‌شود؛ البته، در حالت $x = 0$ ، مقدار a نمی‌تواند برابر صفر باشد.

در حالت $x = -1$ ، مقدار x^{17} برابر -۱ می‌شود؛ بنابراین باید مقدار $(-1)^{3a+2}$ هم برابر -۱ شود و این، وقتی پیش می‌آید که $3a + 2$ ، عددی فرد باشد و چون، ۲ زوج است، باید $3a$ ، یعنی a ، عددی فرد باشد. در حالت $x = -1$ ، مقدار a می‌تواند هر عدد فرد دلخواه باشد.

۱۹۷. $(1; 13; 2; 13; 3; 13; x^2; 4; 13; y^2; 5; 13; x^2; y^2; 13; z; 13; x^2; z; 13)$

۱۹۸. عدد سه‌رقمی را $\overline{abc}$ و $a > c$ می‌گیریم. اگر رقم‌های این عدد را در جهت عکس بنویسیم، عدد سه‌رقمی $\overline{cba}$ به دست می‌آید و برای تفاضل آن‌ها داریم:

$$\begin{aligned}\overline{abc} - \overline{cba} &= (100a + 10b + c) - \\ &- (100c + 10b + a) = 99(a - c)\end{aligned}$$

بسته به این که مقدار $a - c$ ، کدام عدد یک‌رقمی باشد، برای این تفاضل، یعنی $99(a - c)$ ، یکی از عددهای زیر به دست می‌آید:

۰، ۹۹، ۱۹۸، ۲۹۷، ۳۹۶، ۴۹۵، ۵۹۴، ۶۹۳، ۷۹۲، ۸۹۱

در نتیجه، اگر هریک از این عددها را با عدد مقلوب خود جمع کنیم (مقلوب یک عدد، یعنی عددی که با همان رقم‌های عدد اصلی و در جهت عکس

نوشته شده باشد)، یکی از این سه عدد به دست می آید:

$$0, 198, 1089$$

پاسخ. ۰ برای $a = c$ ؛ ۱۹۸ برای $a - c = 1$ ؛ ۱۰۸۹ برای بقیه حالات؛ در حالت $a < c$ ، مجموع مورد نظر، برابر ۱۹۸- یا ۱۰۸۹- می شود.

۱۹۹. چهار رقم را a, b, c و d می گیریم و فرض می کنیم:

$$a \geq b \geq c \geq d$$

در نتیجه، بزرگترین عدد چهاررقمی $\overline{abcd}$ و کوچکترین آن ها $\overline{dcba}$ می شود. بنابر فرض مساله داریم:

$$\begin{array}{r} \overline{abcd} \\ + \\ \overline{dcba} \\ \hline 11220 \end{array}$$

بنابراین $d + a = 10$ و $c + b = 11$ و a, b, c و d ، رقم اند و از ۱۰ کوچکتر). پس

$$a + b + c + d = 21$$

۲۰۰. عددهای اول یکرقمی (که می توانند رقم های عدد ما باشند) عبارت اند از ۲، ۳، ۵ و ۷. اگر نخستین رقم سمت چپ عدد، برابر ۲ باشد، چون باید این عدد بر ۲ بخش پذیر شود، به ناچار باید رقم سمت راست آن هم، برابر ۲ باشد. رقم میانی این عدد هم ۲ است، زیرا عدد ۲۳۲ بر ۳، ۲۵۲ بر ۵ و ۲۷۲ بر ۷ بخش پذیر نیستند. در این حالت، عدد مجهول ۲۲۲ است.

به همین ترتیب، معلوم می شود که، اگر عدد سه رقمی با ۵ آغاز شود، باید برابر ۵۵۵ باشد.

اگر عدد مجهول، با ۳ آغاز شود، باید عدد دورقمی سمت راست آن، بر ۳ بخش‌پذیر باشد. بنابراین، دو رقم سمت راست عدد یا ۵ و ۷ و یا هردو برابر ۳ هستند. آزمایش نشان می‌دهد که، تنها عدد ۳۳۳ با شرط‌های مساله سازگار است.

سرانجام، اگر عدد مجهول با ۷ آغاز شود، آن‌وقت دو رقم بعدی، باید عددی را بخش‌پذیر بر ۷ تشکیل دهند. در این حالت، دو عدد ۷۷۷ و ۷۳۵ با شرط‌های مساله می‌سازند.

پاسخ. ۲۲۲، ۳۳۳، ۵۵۵، ۷۷۷، ۷۳۵.

۲۰۱. عدد مجهول را $\overline{579abc}$ می‌گیریم. این عدد، باید بر ۵ و ۷ و ۹ و، در نتیجه، بر حاصل‌ضرب آن‌ها، یعنی ۳۱۵ بخش‌پذیر باشد (۵ و ۷ و ۹، دویّه‌دو نسبت به هم اول‌اند). داریم:

$$\overline{579abc} = 579000 + \overline{abc} = 1828 \times 315 + 30 + \overline{abc}$$

پس عدد $30 + \overline{abc}$ ، باید برابر ۳۱۵ یا برابر 2×315 ، یعنی ۶۳۰ و یا برابر 3×315 ، یعنی ۹۴۵ باشد.

پاسخ. عدد $\overline{abc}$ ، برابر است با یکی از عددها ۲۸۵، ۶۰۰ یا ۹۱۵.

۲۰۲. کسرهای بزرگتر از a و کوچکتر از $a + 1$ عبارتند از

$$a + \frac{1}{p}, a + \frac{2}{p}, a + \frac{3}{p}, \dots, a + \frac{p-1}{p}$$

یعنی روی هم، $(p-1)$ کسر. همچنین $(p-1)$ کسر، بین عددهای $a + 1$ و $a + 2$ واقع‌اند:

$$a + 1 + \frac{1}{p}, a + 1 + \frac{2}{p}, \dots, a + 1 + \frac{p-1}{p}$$

به‌همین ترتیب، بین $a + ۲$ و $a + ۳$ یا بین $a + ۳$ و $a + ۴$ و غیره، $(p - ۱)$ کسر وجود دارد. سرانجام، $(p - ۱)$ کسر بین $(b - ۱)$ و b ، چنین‌اند:

$$b - ۱ + \frac{۱}{p}, b - ۱ + \frac{۲}{p}, \dots, b - ۱ + \frac{p-۱}{p}$$

روشن است که، تعداد کل این ردیف‌های $(p - ۱)$ کسری، برابر است با $b - a$. بنابراین، مجموع همه آن‌ها، چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{۱}{p} + \frac{۲}{p} + \dots + \frac{p-۱}{p} \right) (b - a) + \\ & + (p - ۱)[a + (a + ۱) + \dots + (b - ۱)] = \\ & = \frac{p(p-۱)}{۲p} (b - a) + (p - ۱) \frac{(a + b - ۱)(b - a)}{۲} = \\ & = \frac{p-۱}{۲} (b^۲ - a^۲) \quad (*) \end{aligned}$$

توجه کنید، برای محاسبه مجموع عددهای پشت‌سرهم از ۱ تا $p - ۱$ ، می‌توان آن‌ها را دوبار و در دو ردیف متفاوت زیرهم نوشت:

$$A = ۱ + ۲ + \dots + (p - ۲) + (p - ۱)$$

$$A = (p - ۱) + (p - ۲) + \dots + ۲ + ۱$$

و سپس، دو ردیف را باهم جمع کرد:

$$۲A = p + p + \dots + p + p = (p - ۱)p$$

$$A = \frac{p(p-۱)}{۲} \text{ پس}$$

از همین روش، می‌توان برای مجموع

$$a + (a + ۱) + (a + ۲) + \dots + (b - ۱)$$

مثلاً، مجموع همه کسرهای ساده‌نشده به مخرج ۱۳، که بین دو عدد ۲ و ۷ واقع‌اند، طبق دستور (*) برابر است با

$$\frac{p-1}{2}(b^2 - a^2) = \frac{13-1}{2}(7^2 - 2^2) = 270$$

اگر p ، مخالف ۲ (که تنها عدد اول زوج است) باشد، $p-1$ عددی زوج و $\frac{p-1}{2}$ ، عددی درست می‌شود؛ در این صورت، به‌جز برای حالت $p=2$ ، مجموع این‌گونه کسرها، همیشه عددی درست است.
۲۰۳. سمت راست برابری، یعنی

$$\begin{aligned}(\overline{xx})^2 + (\overline{yy})^2 &= (10x + x)^2 + (10y + y)^2 = \\ &= (11x)^2 + (11y)^2 = 121(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

بر ۱۲۱ بخش‌پذیر است. پس باید مقدار سمت چپ برابری، یعنی

$$\begin{aligned}\overline{xxyy} &= 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = \\ &= 11(100x + y) = 11[99x + (x + y)]\end{aligned}$$

بر ۱۲۱، یا مقدار داخل کروشه بر ۱۱ و یا $x + y$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. چون x و y ، رقم و از ۱۰ کوچکترند، پس باید داشته‌باشیم:

$$x + y = 11$$

و در نتیجه، برابری ما، به این صورت درمی‌آید:

$$9x + 1 = x^2 + y^2$$

آزمایش نشان می‌دهد که تنها یک جفت رقم در این برابری، صدق می‌کند:
 $x = ۸$ ، $y = ۳$ و درواقع هم

$$۸۸۳۳ = ۸۸^۲ + ۳۳^۲$$

۸. ضرب و تقسیم، در چندجمله‌ای‌ها
 ۲۰۴. تنها پاسخ‌ها را داده‌ایم.

$$۱) x^۶ - ۴x^۵ + ۴x^۴ - ۱۳x^۳ + ۶x - ۹;$$

$$۲) a^۵ - b^۵; \quad ۳) x^۴y^۴ - l^۴;$$

$$۴) a^۴ + b^۴ + ۳ab - ۱; \quad ۵) a^۷ - b^۷$$

$$۶) x^۴ + ۶x^۳ + ۱۱x + ۶$$

۲۰۵. پاسخ‌ها، به دو صورت داده شده‌است:

$$۱) \frac{۲x^۳ - x - ۳}{x + ۱} = ۲x - ۳,$$

$$۲x^۳ - x - ۳ = (x + ۱)(۲x - ۳);$$

$$۲) ۳۶a^۴ - ۶a^۳b + ۲ab^۴ - b^۴;$$

$$۳) ۴x^۴ - ۲x^۳ + x,$$

$$۲۸x^۷ + ۶x^۶ - ۱۵x^۵ + ۱۱x^۴ - ۳x^۳ =$$

$$= (۷x^۳ + ۵x^۲ - ۳x^۳)(۴x^۴ - ۲x^۳ + x);$$

$$۴) \frac{۳}{۴}x^۴ + ۸x^۳ - \frac{۱}{۷}x^۲ + ۳x,$$

$$۹x^۶ + ۹۹x^۵ + ۲۶x^۴ + ۳۴x^۳ + ۱۲x^۲ =$$

$$= (۱۲x^۲ + ۴x) \left(\frac{۳}{۴}x^۴ + ۸x^۳ - \frac{۱}{۷}x^۲ + ۳x \right)$$

$$\delta) a^{\delta} + a^{\gamma}b + a^{\gamma}b^{\gamma} + a^{\gamma}b^{\gamma} + ab^{\gamma} + b^{\delta},$$

$$a^{\delta} - b^{\delta} = (a - b)(a^{\delta} + a^{\gamma}b + a^{\gamma}b^{\gamma} + a^{\gamma}b^{\gamma} + ab^{\gamma} + b^{\delta});$$

$$\epsilon) a^{\epsilon} - a^{\delta}b + a^{\gamma}b^{\gamma} - a^{\gamma}b^{\gamma} + a^{\gamma}b^{\gamma} - ab^{\delta} + b^{\epsilon}, a^{\gamma} + b^{\gamma} = \\ = (a + b)(a^{\epsilon} - a^{\delta}b + a^{\gamma}b^{\gamma} - a^{\gamma}b^{\gamma} + a^{\gamma}b^{\gamma} - ab^{\delta} + b^{\epsilon});$$

$$\zeta) x^{\gamma} - x^{\gamma}y^{\gamma} + y^{\gamma}, x^{\epsilon} + y^{\epsilon} = (x^{\gamma} + y^{\gamma})(x^{\gamma} - x^{\gamma}y^{\gamma} + y^{\gamma});$$

$$\eta) x^{\delta} - x^{\gamma}y + x^{\gamma}y^{\gamma} - x^{\gamma}y^{\gamma} + xy^{\gamma} - y^{\delta} + \frac{\gamma y^{\epsilon}}{x + y},$$

$$x^{\epsilon} + y^{\epsilon} = (x + y)(x^{\delta} - x^{\gamma}y + x^{\gamma}y^{\gamma} - x^{\gamma}y^{\gamma} + \\ + xy^{\gamma} - y^{\delta}) + \gamma y^{\epsilon}$$

۲۰۶. $3a - b$ و $3a + b$ نسبت به هم اولاند (بخشیاب مشترکی،

جز واحد، ندارند). پس مخرج مشترک دو کسر، حاصل ضرب آنها، یعنی $9a^2 - b^2$ می شود و داریم:

$$\frac{2a - b}{3a - b} + \frac{5b - a}{3a + b} = \frac{(2a - b)(3a + b) + (5b - a)(3a - b)}{9a^2 - b^2} \\ = \frac{3a^2 + 15ab - 6b^2}{9a^2 - b^2}$$

بنابر فرض داریم: $5ab = 3b^2 - 10a^2$ ؛ در صورت کسر حاصل، به جای $15ab$ ، مقدار آن، یعنی $3(3b^2 - 10a^2)$ ، قرار می دهیم:

$$\frac{3a^2 + 3(3b^2 - 10a^2) - 6b^2}{9a^2 - b^2} = \frac{-3(9a^2 - b^2)}{9a^2 - b^2} = -3$$

صورت و مخرج کسر را توانستیم بر $9a^2 - b^2$ بخش کنیم، زیرا بنابر فرض، مقدار $9a^2 - b^2$ مخالف صفر است.

۲۰۷. مقدار کسر را (که باید عددی درست باشد) برابر u می‌گیریم و دوطرف برابری را در y ضرب می‌کنیم (تا کسری به‌دست آید که بتوان، در آن، صورت را بر مخرج تقسیم کرد)، به‌دست می‌آید:

$$uy = \frac{yx^2 + yx + y}{xy - 1} = x + 1 + \frac{x + y + 1}{xy - 1}$$

چون uy ، عدد درستی است، پس باید حاصل کسر $\frac{x + y + 1}{xy - 1}$ ، برابر با عددی درست باشد. و این، به‌معنای آن است که، صورت کسر، نمی‌تواند از مخرج آن، کوچکتر باشد:

$$x + y + 1 \geq xy - 1 \Rightarrow (y - 1)x \leq y + 2$$

اگر $y = 1$ آن‌وقت

$$u = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{3}{x - 1}$$

از این‌جا روشن است که، برای درست بودن عدد u ، باید ۳ بر $x - 1$ بخش‌پذیر باشد و این، وقتی ممکن است که $x - 1$ ، برابر ۱ یا ۳ شود:

$$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2; \quad x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$$

و در هر دو حالت (یعنی به‌ازای $x = 2$ و $x = 4$)، به‌دست می‌آید:
 $u = 7$

اگر $y - 1 > 0$ ، آن‌وقت در نابرابری $(y - 1)x \leq y + 2$ ، می‌توان دوطرف را بر $y - 1$ بخش کرد:

$$x \leq \frac{y + 2}{y - 1} = 1 + \frac{3}{y - 1}$$

عدد حاصل از کسر $\frac{3}{y-1}$ نمی‌تواند از ۳ بزرگتر باشد (چون y ، عددی است طبیعی) پس حاصل این کسر می‌تواند برابر ۳ یا ۱ باشد. پس $x \leq 4$.
یعنی x می‌تواند برابر یکی از عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد. در هر حالت u را پیدا می‌کنیم:

$$x = 1 \Rightarrow u = \frac{3}{y-1};$$

$$x = 2 \Rightarrow u = \frac{7}{2y-1};$$

$$x = 3 \Rightarrow u = \frac{13}{3y-1}$$

$$x = 4 \Rightarrow u = \frac{21}{4y-1}$$

در حالت اول، y می‌تواند برابر ۲ یا ۴ و در نتیجه u برابر ۳ یا ۱ باشد؛ در حالت دوم، y برابر ۱ یا ۴ و u برابر ۷ یا ۱ می‌شود؛ در حالت سوم، برای y ، عددی طبیعی به دست نمی‌آید؛ در حالت چهارم، y برابر ۱ یا ۲ و u برابر ۷ یا ۳ می‌تواند باشد.

به این ترتیب، کسر مفروض، برای عددهای طبیعی x و y می‌تواند برابر یکی از عددهای ۷ (به‌ازای $x = 2$ ، $y = 1$ یا $x = 4$ ، $y = 1$)، ۳ (به‌ازای $x = 1$ ، $y = 2$ یا $x = 4$ ، $y = 2$) یا ۱ (به‌ازای $x = 1$ ، $y = 4$ یا $x = 2$ ، $y = 4$) باشد.

۲۰۸. بنابر فرض مساله داریم: $x + y = -(z + t)$. اگر دوطرف این برابری را به توان ۳ برسانیم، به ترتیب داریم:

$$(x + y)^3 = -(z + t)^3;$$

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3 - t^3 - 3zt(z + t);$$

$$x^3 + y^3 - 3xy(z + t) = -z^3 - t^3 - 3zt(z + t);$$

(درست چپ برابری، به جای $x + y$ ، مقدارش $(z + t) -$ را قرار دادیم).
 اکنون با جابه‌جایی جمله‌ها، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 3(xy - zt)(z - t)$$

۲۰۹. اگر $\frac{1}{117} = a$ و $\frac{1}{119} = b$ فرض کنیم، آن‌وقت

$$\begin{aligned} P &= 3 \frac{1}{117} \times 4 \frac{1}{119} - 1 \frac{116}{117} \times 5 \frac{118}{119} - \frac{5}{119} = \\ &= (3 + a)(4 + b) - (2 - a)(6 - b) - 5b = \\ &= (12 + 3b + 4a + ab) - (12 - 2b - 6a + ab) - \\ &- 5b = 10a = \frac{10}{117} \end{aligned}$$

۲۱۰. برای سادگی کار، عدد ۷۱ را با a نشان می‌دهیم، دراین صورت،
 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} M &= (a - 1)(a^9 + a^8 + \dots + a^2 + a + 1) + 1 = \\ &= (a^{10} + a^9 + \dots + a) - \\ &-(a^9 + a^8 + \dots + a^2 + a + 1) + 1 = a^{10} \end{aligned}$$

بنابراین به‌دست می‌آید: $M = 71^{10}$.

۲۱۱. اگر حاصل‌ضرب $x^2 + 2xy + 2y^2$ و $x^2 - 2xy + 2y^2$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت، دست‌کم مقدار عددی یکی از آن‌ها بر ۵ بخش‌پذیر خواهد بود. این حاصل‌ضرب را پیدا می‌کنیم:

$$(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2) = x^4 + 4y^4$$

باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد طبیعی x یا y بر ۵، یکی از این ۵ عدد می‌تواند باشد:

$$0, \pm 1, \pm 2$$

بنابراین، باقی‌مانده حاصل از تقسیم عدد طبیعی x^2 یا y^2 بر ۵، برابر است با

$$1 \text{ یا } \pm 1$$

(مجذور ± 1 ، برابر ۱+ و مجذور ± 2 برابر ۴ می‌شود. ولی در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده ۴، همان باقی‌مانده ۱- است).

پس، از تقسیم x^2 بر ۵ به یکی از دو باقی‌مانده

$$1 \text{ یا } 0$$

و از تقسیم $4y^2$ بر ۵، به یکی از ده باقی‌مانده

$$4 \text{ یا } 0$$

می‌رسیم. دنباله بحث روشن است:

x و y نمی‌توانند یکی بر ۵ بخش‌پذیر و دیگری بر ۵ بخش‌ناپذیر باشد (زیرا، در این صورت، از تقسیم $x^2 + 4y^2$ بر ۵، باقی‌مانده‌ای برابر ۳ یا ۱ به‌دست می‌آید).

برای این‌که $x^2 + 4y^2$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باید یا هر دو عدد x و y بر ۵ بخش‌پذیر باشند و یا هیچ‌کدام از آن‌ها، بر ۵ بخش‌پذیر نباشند.

۲۱۲.

$$۱) (\Delta a - 3b)^2 = (\Delta a)^2 - 2(\Delta a) \cdot (3b) + (3b)^2 =$$

$$= 2\Delta a^2 - 30ab + 9b^2,$$

$$۲) \left(\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} \right)^2 = \left(\frac{xy}{z} \right)^2 - 2 \left(\frac{xy}{z} \right) \left(\frac{xz}{y} \right) + \left(\frac{xz}{y} \right)^2 =$$

$$= \frac{x^2 y^2}{z^2} - 2x^2 + \frac{x^2 z^2}{y^2};$$

$$\begin{aligned}
 3) \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c-d}{2} \right)^2 &= \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{a+b}{2} \right) \left(\frac{c-d}{2} \right) \\
 &+ \left(\frac{c-d}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2) + \frac{1}{4}(a+b)(c-d) \\
 &+ \frac{1}{4}(c^2 - 2cd + d^2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) (2t-1)^2 &= (2t)^2 - 2(2t) + 2(2t) - 1 \\
 &= 4t^2 - 12t + 6t - 1;
 \end{aligned}$$

$$5) (3t+2)^2 = 27t^2 + 12t + 36t + 4;$$

$$6) (x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2y^2 + y^4;$$

$$7) (2p+3q)(2p-3q) = 4p^2 - 9q^2;$$

$$\begin{aligned}
 8) (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) &= \\
 [(x^2 + y^2) + xy][(x^2 + y^2) - xy] &= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 \\
 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 &= x^4 + x^2y^2 + y^4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) (2a-3b+c)(2a+3b-c) &= \\
 = [2a - (3b-c)][2a + (3b-c)] &= \\
 = (2a)^2 - (3b-c)^2 = 4a^2 - 9b^2 - c^2 + 6bc;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) (x-5)(x+2) &= x^2 + (-5+2)x + (-5) \times 2 \\
 &= x^2 - 3x - 10;
 \end{aligned}$$

$$11) (a+7)(a-2) = a^2 + 5a - 14;$$

$$12) (4x+11)(4x-9) = 16x^2 + 4x - 99;$$

$$13) (xy+2a)(xy-2a) = x^2y^2 - 4axy - 4a^2;$$

$$\begin{aligned}
 14) (x+2a-2)(x-a+2) &= \\
 = x^2 + [(2a-2) + (-a+2)]x + &
 \end{aligned}$$

$$+(2a-3)(-a+4) = x^2 + (a+1)x - (2a-3)(a-4)$$

.۲۱۳

$$۱) ۵۲^2 = (۵۰ + ۲)^2 = ۲۵۰۰ + ۲۰۰ + ۴ = ۲۷۰۴;$$

$$۲) ۳۳ \times ۲۷ = (۳۰ + ۳)(۳۰ - ۳) = ۹۰۰ - ۹ = ۸۹۱;$$

$$۳) ۵۹^2 = (۶۰ - ۱)^2 = ۳۶۰۰ - ۱۲۰ + ۱ = ۳۴۸۱;$$

$$۴) ۷۱ \times ۷۲ = (۷۰ + ۱)(۷۰ + ۲) = ۷۰^2 + (۱ + ۲)۷۰ + ۱ \times ۲ = ۴۹۰۰ + ۲۱۰ + ۲ = ۵۱۱۲;$$

$$۵) ۸۳ \times ۷۸ = (۸۰ + ۳)(۸۰ - ۲) = ۸۰^2 + (۳ - ۲)۸۰ + ۳ \times (-۲) = ۶۴۰۰ + ۸۰ - ۶ = ۶۴۷۴$$

$$۶) ۱۰۴ \times ۹۶ = (۱۰۰ + ۴)(۱۰۰ - ۴) = ۱۰۰^2 - ۴^2 = ۱۰۰۰۰ - ۱۶ = ۹۹۸۴$$

۲۱۴. عدد دورقمی را $\overline{a5}$ فرض می‌کنیم. برای مجذور آن داریم:

$$\begin{aligned} (\overline{a5})^2 &= (۱۰a + ۵)^2 = ۱۰۰a^2 + ۱۰۰a + ۲۵ = \\ &= ۱۰۰a(a + ۱) + ۲۵ \end{aligned}$$

یعنی، باید عدد ۲۵ را نوشت و در سمت چپ آن، حاصل ضرب $a(a + ۱)$ را قرار داد. مثلاً

$$۳۵^2 = ۱۰۰ \times ۳ \times ۴ + ۲۵ = ۱۲۲۵;$$

$$۸۵^2 = ۷۲۲۵; \quad ۱۰۵^2 = ۱۱۰۲۵۱$$

۲۱۵. در متن درس این فصل دیدیم که، اگر طول ضلع‌های مجاور به زاویه قائمه را a و b و طول وتر مثلث را c بگیریم، با فرض $m > n$ و m و

n ، عددهایی طبیعی‌اند)، داریم:

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$$

اگر عدد اول ۲ را کنار بگذاریم (۲، تنها عدد اول زوج است)، طول ضلع برابر a ، می‌تواند برابر هر عدد اول باشد. فرض کنیم بخواهیم a برابر عدد اول p باشد:

$$m^2 - n^2 = p \Rightarrow (m - n)(m + n) = 1 \times p$$

برای این‌که m و n ، عددهای طبیعی باشند، باید داشته‌باشیم:

$$m - n = 1 \text{ و } m + n = p$$

از مجموع و تفاضل این دو برابری، به‌دست می‌آید:

$$m = \frac{p+1}{2} \text{ و } n = \frac{p-1}{2}$$

توجه کنید: چون p عددی فرد است، $p+1$ و $p-1$ عددهایی زوج و، بنابراین، $\frac{p+1}{2}$ و $\frac{p-1}{2}$ ، عددهایی طبیعی‌اند.

مثلاً، برای این‌که یکی از ضلع‌های پهلوی زاویه قائمه برابر ۱۹ باشد، باید داشته‌باشیم $m = 10$ و $n = 9$ که در این صورت

$$a = 19, b = 180, c = 181$$

که در آن، درضمن، طول وتر، یعنی ۱۸۱ هم، عددی اول است. در این‌جا طول ضلع‌های چند مثلث فیثاغوری داده‌شده که، در آن، مقدار

a ، عددی اول است:

$$\begin{aligned}a &= 3, & b &= 4, & c &= 5; \\a &= 5, & b &= 12, & c &= 13; \\a &= 7, & b &= 24, & c &= 25; \\a &= 11, & b &= 60, & c &= 61; \\a &= 13, & b &= 84, & c &= 85 \\a &= 17, & b &= 144, & c &= 145;\end{aligned}$$

در همین جا دیدید که، در بسیاری موردها، طول وتر هم، عددی اول است. ولی هر عدد اولی، نمی‌تواند طول وتر مثلث فیثاغوری باشد. طول وتر برابر $m^2 + n^2$ است. بنابراین، اگر یک عدد اول را نتوان به صورت مجموع مجذورهای دو عدد درست نوشت، این عدد نمی‌تواند طول وتر مثلث فیثاغوری باشد.

عدهای اول ۷، ۱۱، ۱۹ و ۲۳ از این قبیل‌اند. ولی عدد ۲۹ را می‌توان به صورت $4 + 25$ یعنی $2^2 + 5^2$ نوشت، یعنی $m = 5$ و $n = 2$ و

$$a = 21, b = 20, c = 29$$

۲۱۶. از فرض $a^2 + a + 1 = 0$ نتیجه می‌شود (به شرط $a \neq 1$):

$$a + \frac{1}{a} = -1, a^3 = 1$$

(با تقسیم دوطرف برابری فرض بر a ، رابطه اول؛ و با ضرب دوطرف برابری فرض در $a - 1$ ، رابطه دوم به دست می‌آید.)
از طرف دیگر، داریم:

$$1373 = 3 \times 457 + 2$$

یعنی

$$a^{1373} = (a^3)^{457} \cdot a^2 = 1 \times a^2 = a^2$$

بنابراین، به ترتیب، داریم

$$a^{1272} + \frac{1}{a^{1272}} = a^2 + \frac{1}{a^2} =$$

$$= \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = -1$$

شرط $a \neq 1$ همیشه برقرار است، زیرا به ازای $a = 1$ مقدار عبارت $a^2 + a + 1$ برابر صفر نمی شود.

به این ترتیب، با فرض $a^2 + a + 1 = 0$ داریم:

$$a^{1272} + \frac{1}{a^{1272}} = -1$$

۲۱۷. اگر عدد x بر ۲ و ۳ بخش پذیر نباشد، باید به صورت

$$x = 6k \pm 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$x^2 = 36k^2 \pm 12k + 1;$$

$$x^2 - 1 = 12(3k^2 \pm k)$$

ولی $3k^2 \pm k = k(k \pm 1) = 2k^2 + k(k \pm 1)$ ، عددی زوج و بر ۲ بخش پذیر است، زیرا $2k^2$ عددی زوج و $k(k \pm 1)$ ، یعنی حاصل ضرب دو عدد پشت سرهم، عددی زوج است؛ پس $x^2 - 1$ بر ۲۴ بخش پذیر است:

$$x^2 - 1 = 24n \quad (n \in \mathbb{N})$$

اگر عدد طبیعی y بر ۲ و ۳ بخش ناپذیر باشد:

$$y^2 - 1 = 24m \quad (m \in \mathbb{N})$$

وقتی دو عدد $x^2 - 1$ و $y^2 - 1$ بر ۲۴ بخش پذیر باشند، تفاضل آنها، یعنی

$$(x^2 - 1) - (y^2 - 1) = x^2 - y^2$$

بر ۲۴ بخش پذیر است.

۲۱۸. اگر پرانتزها را باز کنیم، به دست می آید:

$$\begin{aligned} N &= n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = \\ &= 2(2n^2 + 6n + 7) \end{aligned}$$

برای این که N بر ۱۰ بخش پذیر باشد، باید $2n^2 + 6n + 7$ بر ۵ بخش پذیر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$2n^2 + 6n + 7 = 5k, k \in \mathbb{N}$$

$5k$ را به سمت چپ برابری می بریم و آن را، به این صورت، به ترتیب، تبدیل می کنیم:

$$\begin{aligned} 2n^2 + 6n + 7 - 5k &= 2 \left(n^2 + 3n + \frac{7-5k}{2} \right) = \\ &= 2 \left[\left(n + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{7-5k}{2} \right] = \\ &= 2 \left[\frac{(2n+3)^2}{4} - \frac{-5+10k}{4} \right] = 0 \end{aligned}$$

که از آن جا، باید داشته باشیم:

$$(2n+3)^2 = 5(2k-1)$$

$2n + 3$ ، عددی فرد است، پس باید $5(2k - 1)$ هم مجذور عددی فرد باشد تا برای n ، عددی طبیعی به دست آید. یعنی باید داشته باشیم:

$$2k - 1 = 5(2t + 1), t \in \mathbb{N}$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$(2n + 3)^2 = 25(2t + 1)^2;$$

$$2n + 3 = 5(2t + 1) = 10t + 5;$$

$$2n = 10t + 2 \text{ و } n = 5t + 1, t \in \mathbb{N}$$

به این ترتیب، برای این که N بر 10 بخش پذیر باشد، باید عدد طبیعی n ، به صورت $5t + 1$ باشد که، در آن، t ، عددی طبیعی و دلخواه و یا صفر است. مثلاً

$$n = 1 \Rightarrow N = 30;$$

$$n = 6 \Rightarrow N = 230;$$

$$n = 11 \Rightarrow N = 630;$$

راه حل دوم. توجه می کنیم که

$$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 = (2n + 3)^2 + 5$$

بنابراین، برای بخش پذیر بودن این عدد بر 5 ، باید n چنان باشد که عدد $2n + 3$ به 5 ختم شود؛ یعنی

$$2n + 3 = 10t + 5 \Rightarrow n = 5t + 1$$

راه حل سوم. اگر آخرین رقم مجذورهای عددهای طبیعی پشت سرهم را در نظر بگیریم:

$$1, 4, 9, 6, 9, 4, 1$$

می بینیم تنها به دو طریق می توان چهار عدد پشت سرهم را، در این جا انتخاب کرد، به نحوی که مجموع آن ها برابر مضرب ۱۰ شود:

$$1 + 4 + 9 + 6 = 6 + 9 + 4 + 1 = 20$$

بنابراین، رقم آخر عدد n ، باید برابر ۱ یا ۶، یعنی خود عدد n و به صورت $5t + 1$ باشد.

۲۱۹. باتوجه به این که

$$101^2 - 100^2 = (101 - 100)(101 + 100) = 201;$$

$$99^2 - 98^2 = (99 - 98)(99 + 98) = 197;$$

.....

$$3^2 - 2^2 = (3 - 2)(2 + 2) = 5$$

به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} A &= 1 - 2^2 + 3^2 - \dots + 99^2 - 100^2 + 101^2 = \\ &= 1 + (101^2 - 100^2) + (99^2 - 98^2) + \dots + (3^2 - 2^2) = \\ &= 201 + 197 + \dots + 9 + 5 + 1 \end{aligned}$$

مقدار A را دوبار زیرهم می نویسیم (در دو جهت مختلف) و سپس، جمع می کنیم:

$$\begin{array}{r} A = 201 + 197 + 193 + \dots + 9 + 5 + 1 \\ A = 1 + 5 + 9 + \dots + 193 + 197 + 201 \\ \hline A = 202 + 202 + 202 + \dots + 202 + 202 + 202 \end{array}$$

در A ، بدون عدد ۱، ۱۰۰ جمله و، بنابراین، در دو عبارت بالا برای A ، و همچنین، در مجموع آن، یعنی $2A$ ، ۵۱ جمله وجود دارد، پس

$$2A = 51 \times 202 \Rightarrow A = 5151$$

۲۲۰. عدد مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$B = 9(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \dots + 10^{2n+1}) + \\ + 7 \times 10^{2n} + 2 \times 10^n + 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots + 1)$$

از طرف دیگر، داریم:

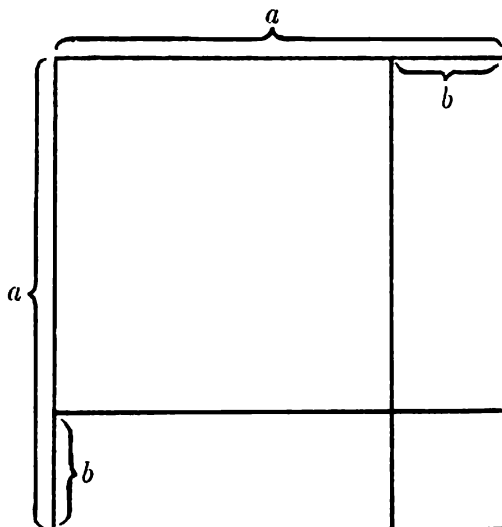
$$9(10^{2n-1} + \dots + 10^{2n+1}) = 10(10^{2n-1} + \dots + 10^{2n+1}) - \\ - (10^{2n-1} + \dots + 10^{2n+1}) = 10^{2n} - 10^{2n+1}; \\ 9(10^{n-1} + \dots + 1) = 10(10^{n-1} + \dots + 1) - \\ - (10^{n-1} + \dots + 1) = 10^n - 1$$

بنابراین

$$B = 10^{2n} - 10^{2n+1} + 7 \times 10^{2n} + 2 \times 10^n - 1 = \\ (10^n)^2 - 3(10^n)^2 + 3(10^n) - 1 = (10^n - 1)^2 = \\ = \underbrace{99 \dots 9^2}_{n \text{ بار}}$$

۲۲۱. همه چیز روی شکل ۳۹ روشن است.

یادداشت. وقتی درستی یک اتحاد جبری، به یاری هندسه، ثابت می‌شود، به معنای آن است که همه حرف‌های داخل اتحاد را، عددهای مثبت فرض کرده‌ایم و، بنابراین، اثبات هندسی، یک اثبات کلی نیست و درستی اتحاد را، تنها برای عددهای مثبت اثبات می‌کند.



شکل ۳۹

۲۴۲. $\sqrt{y}$ را به سمت راست برابری می‌بریم و، بعد، دو طرف برابری را به توان ۲ می‌رسانیم، به دست می‌آید:

$$x = ۱۳۷۴^۲ - ۲ \times ۱۳۷۴\sqrt{y} + y$$

سمت چپ این برابری، عددی طبیعی است، بنابراین سمت راست آن هم، باید عددی طبیعی باشد و این، ممکن نیست مگر این که $\sqrt{y}$ عددی گویا، یعنی y ، مجذور یک عدد طبیعی باشد.

به همین ترتیب، ثابت می‌شود که x هم باید مجذور کامل باشد. به عنوان نمونه، اگر $x = ۷۸۳^۲$ و $y = ۵۹۱^۲$ ، آن وقت

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + \sqrt{y} &= \sqrt{۷۸۳^۲} + \sqrt{۵۹۱^۲} = \\ &= ۷۸۳ + ۵۹۱ = ۱۳۷۴\end{aligned}$$

به چند طریق ممکن است، مجموع دو عدد طبیعی، برابر ۱۳۷۴ شود.

$$۱ + ۱۳۷۳; ۲ + ۱۳۷۲; \dots; ۱۳۷۲ + ۲; ۱۳۷۳ + ۱$$

می‌بینیم که ۱۳۷۳ باره معادله، ۱۳۷۳ زوج جواب طبیعی دارد.

۲۲۳ . در B ، ۹۵ جمله وجود دارد که، اگر به ترتیب و از دوطرف،

جمله‌ها را باهم جفت کنیم، جمله $۴۸^۲$ باقی می‌ماند که جفتی ندارد:

$$A = (۱^۲ + ۹۵^۲) + (۲^۲ + ۹۴^۲) + (۳^۲ + ۹۳^۲) + \dots$$

$$\dots + (۴۶^۲ + ۵۰^۲) + (۴۷^۲ + ۴۹^۲) + ۴۸^۲$$

روشن است که $۴۸^۲$ بر ۹۶ بخش‌پذیر است، زیرا

$$۴۸^۲ = (۲^۴ \times ۳)^۲ = ۲^{۱۲} \times ۳^۲ =$$

$$= (۲^۵ \times ۳)(۲^۷ \times ۳^۲) = ۹۶(۲^۷ \times ۳^۲)$$

هریک از پرانتزها هم بر ۹۶ بخش‌پذیر است:

$$۱^۲ + ۹۵^۲ = (۱ + ۹۵)(۱^۲ - ۱ \times ۹۵ + ۹۵^۲) = ۹۶N_۱$$

$$۲^۲ + ۹۴^۲ = (۲ + ۹۴)(۲^۲ - ۲ \times ۹۴ + ۹۴^۲) = ۹۶N_۲;$$

.....

$$۴۷^۲ + ۴۹^۲ = (۴۷ + ۴۹)(۴۷^۲ - ۴۷ \times ۴۹ + ۴۹^۲) = ۹۶N_۳$$

بنابراین، مجموع آن‌ها، یعنی B ، بر ۹۶ بخش‌پذیر است.

برای اثبات بخش‌پذیر بودن عدد بر ۱۰۰ ، می‌نویسیم:

$$B = (۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲) + (۵^۲ + ۹۵^۲) + (۶^۲ + ۹۴^۲) +$$

$$+ \dots + (۴۹^۲ + ۵۱^۲) + ۵۰^۲$$

ازطرف دیگر:

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ = ۱ + ۸ + ۲۷ + ۶۴ = ۱۰۰;$$

$$۵۰^۲ = ۵۰ \times ۵۰ \times ۵۰ = ۱۰۰(۲۵ \times ۵۰)$$

هر پراتز هم بر ۱۰۰ بخش پذیر است، زیرا مثلاً

$$5^2 + 95^2 = (5 + 95)(5^2 - 5 \times 95 + 95^2) = 100p$$

بنابراین عدد B بر ۱۰۰ بخش پذیر است.

برای محاسبه باقی مانده حاصل از تقسیم عدد B بر ۹۷ می نویسیم:

$$B = 1 + (2^2 + 95^2) + (3^2 + 94^2) + \dots + (48^2 + 49^2)$$

هر پراتز بر ۹۷ بخش پذیر است (چرا؟). بنابراین، در تقسیم عدد B بر ۹۷، باقی مانده ای برابر واحد به دست می آید:

$$B = 97N + 1$$

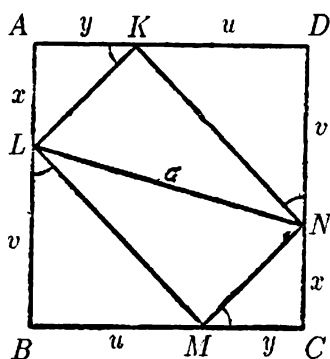
۲۲۴. مستطیل $KLMN$ را در مربع $ABCD$ محاط کرده ایم (شکل ۴۰). چهار مثلث قائم الزاویه AKL ، BLM ، CMN و DKN به دست می آید. این چهار مثلث، زاویه هایی برابر دارند و، بنابراین، ضلع های آنها، متناسب اند (مثلث ها، دوه دو متشابه اند). درضمن، هردو مثلث متقابل، باهم برابرند (دو مثلث با زاویه های قائمه A و C ، دو مثلث با زاویه های قائمه B و D).

طول ضلع های مثلث AKL را با x و y ، و طول های مثلث BLM را با u و v نشان می دهیم. روشن است که

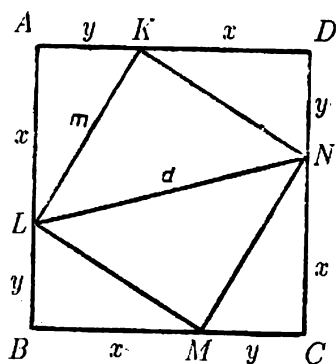
$$x + v = y + u = a$$

برای دو مثلث AKL و BLM می توان نوشت:

$$\frac{x}{y} = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a - y}{a - x}$$



شکل ۴۰



شکل ۳۹

از این جا، به ترتیب خواهیم داشت:

$$x(a - x) = y(a - y);$$

$$ax - x^2 = ay - y^2;$$

$$a(x - y) = (x + y)(x - y);$$

$$(x + y - a)(x - y) = 0$$

برای صفر شدن حاصل ضرب دو مقدار، کافی است، یکی از آن‌ها، برابر صفر باشد، دو حالت پیش می‌آید:

الف) $x + y - a = 0$ یا $x + y = a$ (شکل ۳۹). در این حالت $x = u$ و $y = v$ و $KLMN$ یک مربع است. قطر و مساحت آن را به دست می‌آوریم:

$$S = x^2 + y^2 = m^2$$

یعنی ضلع مربع محاطی برابر $m = \sqrt{S}$ است و قطر آن

$$d^2 = m^2 + m^2 = 2m^2 \Rightarrow d = m\sqrt{2} = \sqrt{2S}$$

درضمن در این حالت

$$S = x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2 = \frac{1}{2}a^2$$

توجه کنید: در این جا، از نابرابری

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}(x+y)^2$$

استفاده کردیم که، درستی آن، به سادگی ثابت می شود. در واقع، اگر پرانتز را باز کنیم و به سمت چپ نابرابری بیاوریم، به نابرابری

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - xy \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4xy \geq 0$$

و یا $(x-y)^2 \geq 0$ می رسیم که درستی آن، روشن است.

ب) $x = y$ (شکل ۴۰). در این حالت $u = v$ و قطرهای مربع $ABCD$ با ضلع های مستطیلی محاطی، موازی است. طول ضلع های مستطیل محاطی را m و n می گیریم. اگر طول قطر آن، برابر d باشد، داریم:

$$\begin{aligned} d^2 &= m^2 + n^2 = 4(x^2 + u^2) = \\ &= 4[(x+u)^2 - 4xu] = 4(a^2 - S) \end{aligned}$$

در این حالت

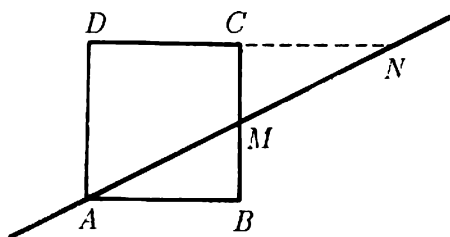
$$S = 4xu \leq \frac{(x+u)^2}{4} = \frac{1}{4}a^2$$

به این ترتیب، اگر $\frac{1}{4}a^2 \leq S < a^2$ ، آن وقت

$$d = \sqrt{4(a^2 - S)}$$

و اگر $a^2 \leq S < \frac{1}{4}a^2$ ، آن وقت

$$d = \sqrt{4S}$$



شکل ۴۱

هر دو حالت را می‌توان بایک دستور نشان داد:

$$d = \sqrt{a^2 + |2S - a^2|}$$

۲۲۵. $|BM| = b$ می‌گیریم، در این صورت $|CM| = a - b$ (شکل ۴۱ را ببینید). دو مثلث قائم‌الزاویه ABM و NCM ، زاویه‌های برابر دارند و، بنابراین، ضلع‌های متناظر آن‌ها متناسب‌اند:

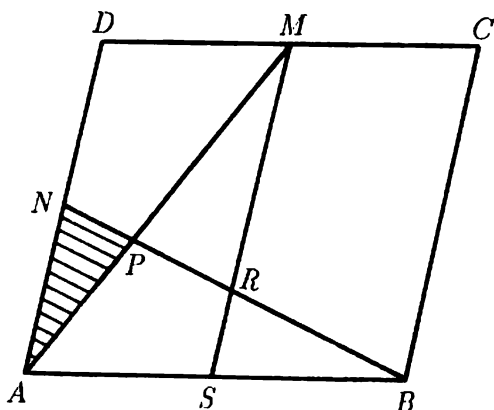
$$\frac{|CN|}{|AB|} = \frac{|CM|}{|BM|} \Rightarrow |CM| = \frac{a(a-b)}{b}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{1}{|CM|} - \frac{1}{|CN|} &= \frac{1}{a-b} - \frac{b}{a(a-b)} = \\ &= \frac{a-b}{a(a-b)} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

۲۲۶. خط راست MS را موازی ضلع AD رسم می‌کنیم تا BN را در نقطه R و ضلع AB را در نقطه S قطع کند (شکل ۴۲). در این صورت

$$|RS| = \frac{1}{2}|AN| = \frac{1}{4}|AD| = \frac{1}{4}|SM|$$



شکل ۴۲

یعنی $|MP| = \frac{3}{4}|AP|$ و $|RM| = \frac{3}{4}|AD| = \frac{3}{4}|AN|$ از

این جا $|AM| = \frac{5}{4}|AP|$ اکنون، یک پیش قضیه را ثابت می‌کنیم.

پیش‌قضیه. اگر دو مثلث در یک زاویه برابر باشند، آنوقت، نسبت مساحت‌های دو مثلث، برابر است با نسبت حاصل ضرب‌های دو ضلع پهلوی این زاویه.

اثبات. دو مثلث ABC و $AB'C'$ را که در زاویه A مشترک‌اند، در نظر

می‌گیریم (شکل ۴۳) داریم:

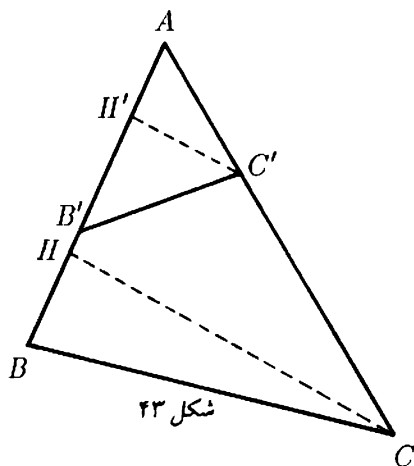
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CH| = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \frac{|CH|}{|AC|};$$

$$S_{AB'C'} = \frac{1}{2}|AB'| \cdot |C'H'| = \frac{1}{2}|AB'| \cdot |AC'| \cdot \frac{|C'H'|}{|AC'|}$$

ولی، به دلیل متشابه بودن دو مثلث ACH و $AC'H'$ داریم:

$$\frac{|CH|}{|AC|} = \frac{|C'H'|}{|AC'|} \quad (*)$$

اکنون، اگر برابری‌های مربوط به مساحت مثلث‌ها را برهم تقسیم کنیم،



شکل ۴۳

به دست می آید:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|AB'| \cdot |AC'|}$$

پیش قضیه ثابت شد. به حل مساله برمی گردیم. باتوجه به پیش قضیه، داریم:

$$\frac{S_{ANP}}{S_{AMD}} = \frac{|AN| \cdot |AP|}{|AD| \cdot |AM|} = \frac{|AN|}{|AD|} \cdot \frac{|AP|}{|AM|} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

چون مساحت مثلث AMD ، $\frac{1}{4}$ مساحت متوازی الاضلاع $ABCD$ است، بنابراین

$$S_{ANP} = \frac{1}{20} S_{ABCD}$$

۲۲۷. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} 2^9 + 2^{99} &= (2^3)^3 + (2^{33})^3 = \\ &= (2^3 + 2^{33})(2^6 - 2^3 \times 2^{33} + 2^{66}) = \\ &= [2^3 + (2^{11})^3] \times 2(2^5 - 2^{35} + 2^{65}) = \\ &= 2(2 + 2^{11})(2^3 - 2^{12} + 2^{22})(2^5 - 2^{35} + 2^{65}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4(1 + 2^{10})(2^2 - 2^{12} + 2^{22})(2^5 - 2^{35} + 2^{65}) = \\
 &= 4 \times 1025(2^2 - 2^{12} + 2^{22})(2^5 - 2^{35} + 2^{65}) = \\
 &= 4100n.
 \end{aligned}$$

یعنی $2^9 + 2^{99}$ بر ۱۰۰ بخش پذیر است.

۲۲۸. سمت چپ برابری را، به این ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + x + 3y + 5 &= \\
 &= (x^2 + x) + (y^2 + 3y) + 5 = \\
 &= \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] + \left[\left(y + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} \right] + 5 = \\
 &= \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

و این عبارت، به‌ازای مقادیرهای حقیقی x و y ، نمی‌تواند برابر صفر شود، زیرا $\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0$ و $\left(y + \frac{3}{2} \right)^2 \geq 0$ و بنابراین

$$\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{5}{2} > 0.$$

برای x و y ، هیچ عددی پیدا نمی‌شود.

۹. تجزیه چندجمله‌ای‌ها

۲۲۹.

$$۱) 6ab(2a - 3b + 1); \quad ۲) (a - 2b)(3x + 5y + 1);$$

$$۳) 7xy(8a + 5b)(2x + 5y);$$

$$۴) 3a^2b^2 - 12ab^2 = 3ab^2(a^2 - 4b^2) =$$

$$= \mathfrak{r}ab^{\mathfrak{r}}(a + \mathfrak{r}b)(a - \mathfrak{r}b);$$

$$\Delta) x^{\mathfrak{r}} - y^{\mathfrak{r}} = (x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}})(x^{\mathfrak{r}} - y^{\mathfrak{r}}) =$$

$$= (x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}})(x + y)(x - y);$$

$$\mathcal{E}) a^{\mathfrak{r}} - b^{\mathfrak{r}} = (a^{\mathfrak{r}})^{\mathfrak{r}} - (b^{\mathfrak{r}})^{\mathfrak{r}} = (a^{\mathfrak{r}} + b^{\mathfrak{r}})(a^{\mathfrak{r}} - b^{\mathfrak{r}}) =$$

$$= (a + b)(a^{\mathfrak{r}} - ab + b^{\mathfrak{r}})(a - b)(a^{\mathfrak{r}} + ab + b^{\mathfrak{r}});$$

$$\mathfrak{V}) x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}} - z^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}xy = (x - y)^{\mathfrak{r}} - z^{\mathfrak{r}} =$$

$$= (x - y + z)(x - y - z);$$

$$\Lambda) x^{\mathfrak{r}} + x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}} = (x^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}}) - x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}} =$$

$$= (x^{\mathfrak{r}} + y)^{\mathfrak{r}} - x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}} = (x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}} + xy)(x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}} - xy);$$

$$\mathfrak{Q}) x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}} = (x^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}}) - \mathfrak{r}x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}} =$$

$$= (x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}})^{\mathfrak{r}} - (\sqrt{\mathfrak{r}}xy)^{\mathfrak{r}}$$

$$= (x^{\mathfrak{r}} + g^{\mathfrak{r}} + \sqrt{\mathfrak{r}}xy)(x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}} - \sqrt{\mathfrak{r}}xy);$$

$$\mathfrak{I} \circ) x^{\mathfrak{r}} - x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}} = (x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}})^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}} =$$

$$= (x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}} + \sqrt{\mathfrak{r}}xy)(x^{\mathfrak{r}} + y^{\mathfrak{r}} - \sqrt{\mathfrak{r}}xy);$$

$$\mathfrak{I} \mathfrak{I}) x^{\mathfrak{r}} - \Delta x^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r} = x^{\mathfrak{r}} - (\mathfrak{r} + \mathfrak{I})x^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r} \times \mathfrak{I} =$$

$$= (x^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r})(x^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{I}) = (x + \mathfrak{r})(x - \mathfrak{r})(x + \mathfrak{I})(x - \mathfrak{I});$$

$$\mathfrak{I} \mathfrak{Z}) ab(a + b) + bc(b - c) - ac(a + c) =$$

$$= ab(a + b) + b^{\mathfrak{r}}c - bc^{\mathfrak{r}} - a^{\mathfrak{r}}c - ac^{\mathfrak{r}} =$$

$$= ab(a + b) + (b^{\mathfrak{r}}c - a^{\mathfrak{r}}c) + (-bc^{\mathfrak{r}} - ac^{\mathfrak{r}}) =$$

$$= ab(a + b) - c(a^{\mathfrak{r}} - b^{\mathfrak{r}}) - c^{\mathfrak{r}}(a + b) =$$

$$= ab(a + b) - c(a + b)(a - b) - c^{\mathfrak{r}}(a + b) =$$

$$= (a + b)[ab - c(a - b) - c^{\mathfrak{r}}] =$$

$$\begin{aligned}
&= (a+b)[(ab+bc)+(-ac-c^2)] = \\
&= (a+b)[b(a+c)-c(a+c)] = \\
&= (a+b)(a+c)(b-c); \\
13) \quad &x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 = \\
&= (x^2 + y^2 + z^2 + 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2) - 4x^2y^2 = \\
&= (x^2 + y^2 - z^2)^2 - (2xy)^2 = \\
&= (x^2 + y^2 - z^2 + 2xy)(x^2 + y^2 - z^2 - 2xy) = \\
&= [(x+y)^2 - z^2][(x-y)^2 - z^2] = \\
&= (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)
\end{aligned}$$

۱۴) این چندجمله‌ای را با دو روش تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&2t^2 + t^2 + 4t^2 + t + 2 = \\
&= 2(t^2 + 2t^2 + 1) + (t^2 + t) = 2(t^2 + 1)^2 + t(t^2 + 1) = \\
&= (t^2 + 1)(2t^2 + t + 2); \\
&2t^2 + t^2 + 4t^2 + t + 2 = \\
&= (2t^2 + 2t^2) + (t^2 + t) + (2t^2 + 2) = \\
&= 2t^2(t^2 + 1) + t(t^2 + 1) + 2(t^2 + 1) = \\
&= (t^2 + 1)(2t^2 + t + 2)
\end{aligned}$$

سه‌جمله‌ای درجه دوم $2t^2 + t + 2$ قابل تجزیه نیست (آزمایش کنید!).

$$\begin{aligned}
15) \quad &x^2 - 2x^2 + 12x - 8 = \\
&= (x^2 + 8x) + (-2x^2 + 4x - 8) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x(x^2 + 1) - 2(x^2 - 2x + 4) = \\
&= x(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - 2(x^2 - 2x + 4) = \\
&= (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x - 2) = \\
&= (x^2 - 2x + 4)[(x + 1)^2 - 3] = \\
&= (x^2 - 2x + 4)(x + 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3})
\end{aligned}$$

سه‌جمله‌ای درجه دوم $x^2 - 2x + 4$ قابل‌تجزیه به ضرب دو عامل درجه اول نیست، زیرا چنین می‌شود:

$$x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3$$

.۲۳۰

$$\begin{aligned}
۱) \quad &(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = \\
&= [(a + b) + c]^3 - (a^3 + b^3) - c^3 = \\
&= (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 - \\
&\quad - (a + b)(a^2 - ab + b^2) - c^3 = \\
&= (a + b)[(a + b)^2 + 3(a + b)c + 3c^2 - a^2 + ab - b^2] = \\
&= (a + b)(3ab + 3ac + 3bc + 3c^2) = \\
&= 3(a + b)[(ab + ac) + (bc + c^2)] = \\
&= 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)] = \\
&= 3(a + b)(b + c)(c + a)
\end{aligned}$$

یادداشت ۱. چندجمله‌ای

$$A = 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 6x - 3$$

را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای A ، به‌ازای $x = 1$ برابر صفر می‌شود:

$$5 - 3 + 7 - 6 - 3 = 0$$

از این‌جا، به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت که، چندجمله‌ای A ، بر $x - 1$ بخش‌پذیر است. فرض کنید از تقسیم A بر $x - 1$ ، خارج‌قسمت برابر B و باقی‌مانده برابر R باشد، در این صورت، باید داشته‌باشیم:

$$A = (x - 1)B + R$$

این، یک اتحاد است (اتحاد تقسیم)، زیرا با ضرب بخش‌یاب در خارج‌قسمت و سپس، اضافه کردن باقی‌مانده به این حاصل ضرب، باید بخشی به‌دست آید. یعنی دوطرف برابری، معرف یک مقدار و، بنابراین، اتحاد است.

در اتحاد، به‌جای حرف (در این‌جا x)، هر عددی قرار دهیم، دوطرف برابر می‌شوند. اگر به‌جای x ، عدد ۱ قرار دهیم، هم A و هم $(x - 1)B$ برابر صفر می‌شود، یعنی به‌دست می‌آید: $R = 0$ و از آن‌جا

$$A = (x - 1)B$$

A بر $x - 1$ بخش‌پذیر است یا، به‌زبان دیگر، در تجزیه A ، عامل $x - 1$ وجود دارد.

این نتیجه‌گیری، کلی است: اگر یک چندجمله‌ای به‌ازای $x = 5$ یا $x = -2$ برابر صفر شود، به‌معنای آن است که چندجمله‌ای بر $x - 5$ یا $x + 2$ بخش‌پذیر است؛ همچنین، اگر یک چندجمله‌ای به‌ازای مثلاً $x = -y$ برابر صفر شود، به‌این معناست که چندجمله‌ای بر $x + y$ بخش‌پذیر است.

یادداشت ۲. این چندجمله‌ای‌ها را در نظر بگیرید:

$$x + y; \quad xy; \quad x^2 + y^2; \quad xy^2 + x^2y$$

در هر کدام از این‌ها، اگر x را به y و y را به x تبدیل کنیم، چندجمله‌ای تغییر نمی‌کند. هریک از این چندجمله‌ای‌ها، نسبت به x همان وضعی را دارند که نسبت به y . گویند، این چندجمله‌ای‌ها، نسبت به x و y متقارن‌اند. چندجمله‌ای

$$x^2 + x^2y + x^2y^2 + xy^2 + y^2$$

هم، نسبت به x و y متقارن است.

همچنین، چندجمله‌ای‌های

$$x + y + z - xyz; \quad x^2 + y^2 + z^2$$

نسبت به x و y و z متقارن‌اند، یعنی، در هریک از آن‌ها، می‌توان هر دو مجهول دلخواه را باهم عوض کرد، بدون این‌که تغییری در عبارت به‌وجود آید: می‌توان x را به y و y را به x ، یا x را به z و z را به x ، یا y را به z و z را به y تبدیل کرد، بدون این‌که در عبارت تغییری حاصل شود.

ویژگی اصلی یک چندجمله‌ای یا عبارت متقارن (نسبت به دو یا چند حرف)، این است که، هر تبدیلی در آن انجام شود (تجزیه شود، پراکنش‌ها باز شوند، ساده شود و غیره)، بازهم باید عبارتی متقارن به‌دست آید.



اکنون، باتوجه به این دو یادداشت، می‌توان تمرین ۱۳۰، ۱) را ساده‌تر حل کرد.

این عبارت نسبت به a و b و c متقارن است، پس باید تجزیه آن هم، نسبت به a و b و c ، متقارن باشد.

ازطرف دیگر، این عبارت، به‌ازای $a = -b$ برابر صفر می‌شود (آزمایش کنید!)، پس بر $a + b$ بخش‌پذیر است. ولی به‌دلیل متقارن بودن نسبت به a

و b و c و باید بر $b + c$ و $c + a$ نیز بخش پذیر باشد. یعنی باید داشته باشیم

$$(a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 = m(a + b)(b + c)(c + a)$$

m یک عدد است و به a و b و c بستگی ندارد، زیرا سمت چپ برابری، نسبت به a ، از درجه دوم است (a^2 و $-a^2$ حذف می شوند). بنابراین اگر m شامل a باشد، سمت راست برابری بالاتر از درجه دوم می شود.

چون برابری بالا، یک اتحاد است، می توان برای پیدا کردن مقدار m ، به جای a و b و c ، سه عدد دلخواه قرار داد، مثلاً $a = 1$ ، $b = 2$ و $c = 0$ ، در این صورت به دست می آید،

$$(1 + 2 + 0)^2 - 1^2 - 2^2 = m(1 + 2)(2 + 0)(0 + 1)$$

یا $6m = 18$ ، یعنی $m = 3$ و

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 &= 3(a + b)(b + c)(c + a); \\ 3(a - b)^2 + 3(b - c)^2 + 3(c - a)^2 \\ &= (a - b)^2 + (b^2 - 2b^2c + 2bc^2 - c^2) + (c^2 + 2ca^2 - 2c^2a - a^2) \\ &= (a - b)^2 + (2ca^2 - 2b^2c) + (2bc^2 - 2ac^2) - (a^2 - b^2) \\ &= (a - b)^2 + 2c(a^2 - b^2) - 2c^2(a - b) - (a - b)(a^2 + ab + \\ &+ b^2) = (a - b)[(a - b)^2 + 2c(a + b) - 2c^2 - a^2 - ab - b^2] \\ &= (a - b)[a^2 - 2ab + b^2 + 2ac + 2bc - 2c^2 - a^2 - ab - b^2] \\ &= 3(a - b)(-ab + ac + bc - c^2) \\ &= 3(a - b)[-a(b - c) + c(b - c)] \\ &= 3(a - b)(b - c)(c - a) \end{aligned}$$

یادداشت. این عبارت متقارن نیست، زیرا اگر مثلاً a را به b و b را به a تبدیل کنیم، عبارت به قرینه خودش تبدیل می‌شود. به همین مناسبت، گاهی آن را «متقارن منفی» می‌نامند.

ولی این عبارت، نسبت به a و b و c ، دوری است، یعنی اگر a را به b ، b را به c و c را به a تبدیل کنیم، در عبارت تغییری حاصل نمی‌شود. باتوجه به همین ویژگی دوری بودن عبارت، و باتوجه به این که به ازای $a = b$ برابر صفر می‌شود، می‌توان شبیه تمرین قبل، آن را تجزیه کرد. (خودتان عمل و استدلال کنید).

(۳) این عبارت، در وضعی که داده شده است، نسبت به x و y و z ، نه متقارن است و نه دوری. به نظر می‌رسد که باید با باز کردن پرانتزها، برای تجزیه آن تلاش کرد. ولی اگر در این عبارت، به جای x ، $-x_1$ بگذاریم، یعنی فرض کنیم $x = -x_1$ ، به این عبارت می‌رسیم:

$$(x_1 - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x_1)^2$$

که همان عبارت تمرین (۲) از مسأله ۲۳۰ است. درواقع این عبارت نسبت به x_1 و y و z دوری است و باتوجه به حل تمرین (۲)، نتیجه تجزیه آن چنین است:

$$\begin{aligned} 3(x_1 - y)(y - z)(z - x_1) &= \\ &= 3(x + y)(z - y)(x + z) \end{aligned}$$

(۴) اگر $a^2 - a^2$ را به عبارت اضافه کنیم، به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} a^5 + a + 1 &= (a^5 - a^2) + (a^2 + a + 1) = \\ &= a^2(a - 1)(a^2 + a + 1) + (a^2 + a + 1) = \\ &= (a^2 + a + 1)(a^2 - a^2 + 1) \end{aligned}$$

۵) در آغاز، عبارت را به این صورت می‌نویسیم (نام عبارت را، برای سادگی کار، A می‌گذاریم):

$$\begin{aligned} A &= [x(x+3)] \cdot [(x+1)(x+2)] - 120 = \\ &= (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) - 120 \end{aligned}$$

اکنون $x^2 + 3x$ را y می‌نامیم:

$$\begin{aligned} A &= y(y+2) - 120 = y^2 + 2y - 120 = \\ &= (y+1)^2 - 121 = (y+1+11)(y+1-11) = \\ &= (x^2 + 3x + 12)(x^2 + 3x - 10) = \\ &= (x^2 + 3x + 12)(x-2)(x+5) \end{aligned}$$

سه‌جمله‌ای درجه دوم $x^2 + 3x + 12$ قابل تجزیه نیست (آزمایش کنید).
۶) به‌ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2) &= \\ &= -a^2 - b^2 - c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = \\ &= -(a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) + 4a^2b^2 = \\ &= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = \\ &= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = \\ &= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = \\ &= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b) \end{aligned}$$

.۲۳۱

$$۱) \frac{m}{a^2b} + \frac{n}{ab^2} = \frac{mb+na}{a^2b^2};$$

$$۲) \frac{x}{a-b} + \frac{y}{b-a} = \frac{x}{a-b} - \frac{y}{a-b} = \frac{x-y}{a-b};$$

$$\begin{aligned} ۳) \frac{a-b}{۲a^۲-ab-۳b^۲} + \frac{a+b}{۲a^۲-\Delta ab+۳b^۲} &= \\ &= \frac{a-b}{(۲a^۲-۳ab)+(۲ab-۳b^۲)} + \frac{a+b}{(۲a^۲-۳ab)-(۲ab-۳b^۲)} \\ &= \frac{a-b}{a(۲a-۳b)+b(۲a-۳b)} + \frac{a+b}{a(۲a-۳b)-b(۲a-۳b)} \\ &= \frac{a-b}{(۲a-۳b)(a+b)} + \frac{a+b}{(۲a-۳b)(a-b)} = \\ &= \frac{(a-b)^۲+(a+b)^۲}{(۲a-۳b)(a+b)(a-b)} = \frac{۲(a^۲+b^۲)}{(۲a-۳b)(a^۲-b^۲)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۴) \frac{x^۲-a^۲}{x^۲-bx+cx-bc} : \frac{x^۲-ax-cx+ac}{x^۲-b^۲} &= \\ &= \frac{(x-a)(x+a)}{(x-b)(x+c)} \times \frac{(x-b)(x+b)}{(x-a)(x-c)} = -\frac{(x+a)(x+b)}{(x+c)(x-c)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۵) \frac{\Delta a}{a+b} - \frac{۲a-۳b}{a-b} - \frac{۲(a^۲-۳ab+b^۲)}{a^۲-b^۲} &= \\ &= \frac{\Delta a(a-b) - (۲a-۳b)(a+b) - ۲(a^۲-۳ab+b^۲)}{(a+b)(a-b)} = \\ &= \frac{a^۲+۲ab+b^۲}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b} \end{aligned}$$

۶) صورت و مخارج کسر مرکب را، به طور جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^۲ - (x-y)^۲}{(x-y)(x+y)} = \frac{۴xy}{x^۲-y^۲};$$

$$\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2}$$

بنابراین حاصل کسر مرکب، چنین می‌شود:

$$\frac{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}} = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

حاصل کسر دوم هم به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^2 y^2}{2(x^2 + y^2)}$$

بنابراین نتیجه عمل‌های این تمرین، منجر می‌شود به

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} \times \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 y} = \frac{4}{xy};$$

(۷) برای این‌که صورت مساله را تکرار نکنیم، حاصل عبارت را، برابر A می‌گیریم:

$$\begin{aligned} A &= \left[\left(\frac{12 - a^2 - 8}{4a} \right) \times \frac{4}{2-a} - \left(\frac{a+2}{a} \right) \right] \times \frac{4-a}{a} = \\ &= \left(\frac{4-a^2}{4a} \times \frac{4}{2-a} - \frac{a+2}{a} \right) \times \frac{4-a}{a} = \\ &= \left(\frac{2+a}{a} - \frac{a+2}{a} \right) \times \frac{4-a}{a} = 0 \times \frac{4-a}{a} = 0. \end{aligned}$$

.۲۳۲

$$۱) \frac{\Delta a^2 - \Delta ax}{a^2 - x^2} = \frac{\Delta a(a-x)}{(a-x)(a+x)} = \frac{\Delta a}{a+x};$$

$$\begin{aligned}
 ۲) \frac{۸۱a^۲ - ۱۶b^۲}{۳a + ۲b} &= \frac{(9a^۲ + ۴b^۲)(۳a + ۲b)(۳a - ۲b)}{۳a + ۲b} = \\
 &= (9a^۲ + ۴b^۲)(۳a - ۲b); \\
 ۳) \frac{a^۶ - b^۶}{a^۲ - b^۲} &= \frac{(a^۲)^۳ - (b^۲)^۳}{a^۲ - b^۲} = \\
 &= \frac{(a^۲ - b^۲)(a^۲ + a^۲b^۲ + b^۴)}{a^۲ - b^۲} = a^۲ + a^۲b^۲ + b^۴ = \\
 &= (a^۲ + b^۲)^۲ - a^۲b^۲ = (a^۲ + ab + b^۲)(a^۲ - ab + b^۲);
 \end{aligned}$$

۴) اگر به طور مستقیم، صورت را بر مخرج تقسیم کنیم، خارج قسمت چنین می شود (باقی مانده تقسیم، برابر صفر است):

$$\begin{aligned}
 ۵) \frac{۱۶a^۲ - ۸a^۲b + ۴a^۲b^۲ - ۲ab^۲ + b^۴}{a^۲ + ۸} &= \frac{(a^۲ + ۴)^۲ - ۴a^۲}{a^۲ + ۲^۲} = \\
 &= \frac{(a^۲ - ۲a + ۴)(a^۲ + ۲a + ۴)}{(a + ۲)(a^۲ - ۲a + ۴)} = \frac{a^۲ + ۲a + ۴}{a + ۲}; \\
 ۶) \frac{۲۴x^۶ - ۳۷۵y^۹}{۴x^۵ + ۱۰x^۲y^۲ + ۲۵xy^۶} &= \frac{۳[(۲x^۲)^۳ - (۵y^۳)^۳]}{x(۴x^۲ + ۱۰x^۲y^۲ + ۲۵y^۶)} = \\
 &= \frac{۳(۲x^۲ - ۵y^۳)(۴x^۲ + ۱۰x^۲y^۲ + ۲۵y^۶)}{x(۴x^۲ + ۱۰x^۲y^۲ + ۲۵y^۶)} = \frac{۳(۲x^۲ - ۵y^۳)}{x}
 \end{aligned}$$

۷) حاصل عبارت را M می نامیم:

$$M = \frac{\frac{m^۲ + n^۲ - mn}{n}}{\frac{m - n}{mn}} \times \frac{(m + n)(m - n)}{(m + n)(m^۲ - mn + n^۲)} =$$

$$= \frac{m(m^2 + n^2 - mn)}{m - n} \times \frac{(m + n)(m - n)}{(m + n)(m^2 - mn + n^2)} = m$$

(۸) حاصل عبارت را B می‌گیریم:

$$\begin{aligned} B &= \frac{y + z}{xy + xz + 1} \times \frac{xy + 1}{y} - \frac{z}{y(xy + xz + 1)} = \\ &= \frac{(y + z)(xy + 1) - z}{y(xy + xz + 1)} = \\ &= \frac{xy(y + z) + y + z - z}{y(xy + xz + 1)} = \frac{y(xy + xz + 1)}{y(xy + xz + 1)} = 1; \end{aligned}$$

(۹) حاصل عبارت را X می‌نامیم:

$$X = \frac{(17x + 1)(x - 1)}{(17x + 1)(x + 1)} \times \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(x - 1)} = 1$$

$$\cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \text{ پاسخ. } ۲۳۳$$

$$\cdot \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2) \text{ پاسخ. } ۲۳۴$$

۲۳۵. ابتدا هریک از کسرهای ساده کنید، بعد مقادیر را قرار دهید.

$$۱) \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab - b^2} = \frac{(a - b)^2}{b(a - b)} = \frac{a - b}{b} =$$

$$= \frac{-0.5 + 1.5}{-1.5} = -\frac{1}{1.5} = -\frac{2}{3};$$

$$۲) \frac{(a + b)^2 - c^2}{a + b + c} = a + b - c = 0.25 + \frac{2}{3} + 0.5 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 1\frac{5}{12};$$

$$\begin{aligned} ۳) \frac{x^۲ - ۲ax}{b^۲ + ab - ۲a^۲} &= \frac{(a-b)^۲ - ۲a(a-b)}{b^۲ - ab + ۲ab - ۲a^۲} = \\ &= \frac{(a-b)(a-b-۲a)}{b(b-a) + ۲a(b-a)} = \frac{(b-a)(b+۲a)}{(b-a)(b+۲a)} = ۱ \end{aligned}$$

. ۲۳۶

$$۱) a^۲ + b^۲ = (a+b)^۲ - ۲ab = ۱ - ۲ = -۱;$$

$$۲) a^۳ + b^۳ = (a+b)^۳ - ۳ab(a+b) =$$

$$= (-۱)^۳ - ۳ \times ۱(-۱) = -۱ + ۳ = ۲;$$

$$۳) a^۴ + b^۴ = (a^۲ + b^۲)^۲ - ۲a^۲b^۲ = (-۱)^۲ - ۲ = -۱;$$

$$۴) \frac{۱}{a^{۱۲}} + \frac{۱}{b^{۱۲}} = \frac{a^{۱۲} + b^{۱۲}}{a^{۱۲}b^{۱۲}} = \frac{(a^۴)^۳ + (b^۴)^۳}{(ab)^{۱۲}} =$$

$$= (a^۴ + b^۴)^۳ - ۳a^۴b^۴(a^۴ + b^۴) =$$

$$= (-۱)^۳ - ۳ \times ۱(-۱) = -۱ + ۳ = ۲;$$

$$۵) a^۵ + b^۵ = (a^۳)^۲ + (b^۳)^۲ = (a^۳ + b^۳)^۲ -$$

$$- ۳a^۳b^۳(a^۳ + b^۳) = ۲^۲ - ۳ \times ۱ \times ۲ = ۲;$$

$$۶) a^{۱۶} + b^{۱۶} = (a^۴)^۴ + (b^۴)^۴ = (a^۴ + b^۴)^۴ -$$

$$- ۲a^۴b^۴ = [(a^۴)^۲ + (b^۴)^۲]^۲ - ۲ = [(a^۴ + b^۴)^۲ - ۲a^۴b^۴]^۲ -$$

$$- ۲ = [(-۱)^۲ - ۲]^۲ - ۲ = ۱ - ۲ = -۱$$

۲۳۷. برابری فرض را، می‌توان این‌طور نوشت ($a^۲$ را به دو طرف

برابری اضافه می‌کنیم):

$$a^۲ = (a^۲ + c^۲ - ۲ac) + (۲ab - ۲bc) =$$

$$= (a-c)^۲ + ۲b(a-c)$$

به همین ترتیب، اگر b^2 را به دو طرف برابری اضافه کنیم، به دست می‌آید:

$$b^2 = (b - c)^2 + 2a(b - c)$$

اکنون داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + (a - c)^2}{b^2 + (b - c)^2} &= \frac{2(a - c)^2 + 2b(a - c)}{2(b - c)^2 + 2a(b - c)} = \\ &= \frac{2(a - c)(a - c + b)}{2(b - c)(b - c + a)} = \frac{a - c}{b - c} \end{aligned}$$

در صورت مساله، دو شرط دیگر هم داده شده بود. باتوجه به شرط $b \neq c$ ، جواب مساله معنا دارد (مخرج آن برابر صفر نیست) و باتوجه به شرط $a + b \neq c$ ، توانستیم، صورت و مخرج کسر را بر $a + b - c$ (که مخالف صفر است)، تقسیم کنیم.

۲۳۸. راهنمایی. بزرگترین بخش‌یاب مشترک صورت و مخرج را، با روش تقسیم‌های متوالی به دست آورید! این بزرگترین بخش‌یاب مشترک، برابر است با $x^5 + 1$. صورت و مخرج بر $x^5 + 1$ بخش‌پذیر است

$$\frac{x^{15} + 1}{x^{25} + 1} = \frac{x^{10} - x^5 + 1}{x^{20} - x^{15} + x^{10} - x^5 + 1}$$

۲۳۹. صورت و مخرج را، به‌طور جداگانه، تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(a + b)^2 + 2a^2b^2 &= \\ &= (a^2 + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) + 2a^2b^2 = \\ &= (a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 + a^2b^2) + (a^4b + \\ &+ 2a^3b^2 + 2a^2b^3 + ab^4) + (a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2(a^2 + 2a^2b + 2ab^2 + b^2) + \\
&+ ab(a^2 + 2a^2b + 2ab^2 + b^2) + \\
&+ b^2(a^2 + 2a^2b + 2ab^2 + b^2) = \\
&= (a^2 + 2a^2b + 2ab^2 + b^2)(a^2 + ab + b^2); \\
&(a^2 + b^2)(a + b)^2 + a^2b^2 = \\
&= (a^2 + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) + a^2b^2 = \\
&= a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 = \\
&= (a^2 + ab + b^2)^2
\end{aligned}$$

بنابراین، صورت و مخرج کسر بر $a^2 + ab + b^2$ بخش پذیرند و مقدار کسر، بعد از ساده شدن، چنین می شود:

$$\frac{a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4}{a^2 + ab + b^2}$$

۲۴۰. اگر جذر عدد را بگیریم، حاصل جذر، برابر ۱۵۶۲۵ و باقی مانده جذر برابر ۱۰۲۴ می شود. بنابراین

$$244141649 = 15625^2 + 1024,$$

۱۰۲۴ برابر است با 2^6 و ۱۵۶۲۵ (اگر جذر بگیریم)، برابر است با 125^2 یا 5^6 . در نتیجه

$$\begin{aligned}
244141649 &= 5^{12} + 2^{10} = \\
&= (5^{12} + 2 \times 5^6 \times 2^5 + 2^{10}) - 2 \times 5^6 \times 2^5 = \\
&= (5^6 + 2^5)^2 - (5^3 \times 2^3)^2 = \\
&= (5^6 + 2^5 - 1000)(5^6 + 2^5 + 1000) = \\
&= 14657 \times 16657
\end{aligned}$$

۲۴۱. عددهای ۳ و ۵ و ۸، دوبه دو نسبت به هم اول‌اند، بنابراین، اگر عددی بر این سه عدد بخش‌پذیر باشد، بر حاصل ضرب آن‌ها، یعنی ۱۲۰ بخش‌پذیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} ۱) \quad ۹x^5 - ۵x^3 - ۴x &= (۹x^5 - ۶x^3 - ۳x) + (x^3 - x) = \\ &= ۳(۳x^5 - ۲x^3 - x) + (x - ۱)x(x + ۱) \end{aligned}$$

چون حاصل ضرب سه عدد درست پشت سرهم بر ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین، عدد مفروض هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

$$\begin{aligned} ۲) \quad ۹x^5 - ۵x^3 - ۴x &= (۱۰x^5 - ۵x^3 - ۵x) - \\ &- (x^5 - x) = ۵(۲x^5 - x^3 - x) - x(x^2 - ۱)(x^2 + ۱) = \\ &= ۵(۲x^5 - x^3 - x) - x(x - ۱)(x + ۱)(x^2 + ۵ - ۴) = \\ &= ۵(۲x^5 - x^3 - x) - ۵x(x - ۱)(x + ۱) - \\ &- (x - ۲)(x - ۱)x(x + ۱)(x + ۲) \end{aligned}$$

حاصل ضرب پنج عدد درست پشت سرهم، بر ۵ بخش‌پذیر است، بنابراین عدد مفروض هم بر ۵ بخش‌پذیر است.

$$\begin{aligned} ۳) \quad ۹x^5 - ۵x^3 - ۴x &= x[(۸x^4 - ۸) + (x^3 - ۵x^2 + ۴)] = \\ &= x[۸(x^4 - ۱) + (x^3 - ۴)(x^2 - ۱)] = \\ &= ۸[x(x^3 - ۱)] + x(x^3 - ۴)(x - ۱)(x + ۱) \end{aligned}$$

اگر x عددی فرد باشد، $x - ۱$ و $x + ۱$ دو عدد زوج متوالی‌اند و حاصل ضرب آن‌ها بر ۸ بخش‌پذیر است. اگر x عددی زوج باشد، آنوقت x^5 ، x^3 و $۴x$ و، در نتیجه، $۹x^5 - ۵x^3 - ۴x$ ، بر ۸ بخش‌پذیر است.

۲۴۲. عدد دورقمی $\overline{xy}$ را a می‌نامیم. باتوجه به سمت راست برابری فرض، روشن است که $a^2 - a$ ، یعنی $a(a - 1)$ ، باید بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد. a و $a - 1$ ، دو عدد متوالی‌اند و نسبت به‌هم، اول. بنابراین از a و $a - 1$ ، یکی بر ۴ و دیگری بر ۲۵ بخش‌پذیر است. اگر a بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد، می‌تواند برابر یکی از عددهای ۲۵، ۵۰ یا ۷۵ شود، ولی در هیچ‌کدام از این سه‌حالت، به‌جز $a = ۲۵$ ، $a - 1$ بر ۴ بخش‌پذیر نیست. ولی $a = ۲۵$ در معادلهٔ مساله صدق نمی‌کند. اگر $a - 1$ بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد، باید a برابر یکی از عددهای ۲۶، ۵۱ یا ۷۶ شود. و، از بین آن‌ها، تنها ۷۶ بر ۴ بخش‌پذیر است. آزمایش نشان می‌دهد که $\overline{xy} = ۷۶$ (یعنی $x = ۷$ و $y = ۶$)، در معادلهٔ مساله صدق می‌کند.

۲۴۳. داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{۲۹۵ - ۴۱۳\sqrt{۲} + ۱۷۷\sqrt{۴}}{۵ + ۳\sqrt{۴} - ۷\sqrt{۲}} = \\ & = \frac{۵۹(۵ - ۷\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۴})}{۵ + ۳\sqrt{۴} - ۷\sqrt{۲}} = ۵۹ \end{aligned}$$

۲۴۴. برابری فرض را می‌توان به‌ترتیب، به‌این صورت تبدیل کرد:

$$x(y + z - x) + y(z + x - y) = z(x + y - z);$$

$$2xy - x^2 - y^2 = -z^2;$$

$$(x - y)^2 - z^2 = 0;$$

$$(x - y + z)(x - y - z) = 0$$

این حاصل‌ضرب، وقتی برابر صفر می‌شود که، دست‌کم، یکی از عامل‌های ضرب برابر صفر باشد:

$$x - y + z = 0 \Rightarrow x + z = y;$$

$$x - y - z = 0 \Rightarrow y + z = x$$

۲۴۵. هریک از عبارت‌های صورت و مخرج را، به ضرب عامل‌ها، تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} a^{\vee}(c-b) + b^{\vee}(a-c) + c^{\vee}(b-a) &= \\ &= c(a^{\vee} - b^{\vee}) - ab(a^{\vee} - b^{\vee}) - c^{\vee}(a-b) = \\ &= (a-b)[c(a^{\vee} + ab + b^{\vee}) - ab(a+b) - c^{\vee}] = \\ &= (a-b)(a^{\vee}c + abc + b^{\vee}c - a^{\vee}b - ab^{\vee} - c^{\vee}) = \\ &= (a-b)[-a^{\vee}(b-c) - ab(b-c) + c(b^{\vee} - c^{\vee})] = \\ &= (a-b)(b-c)(-a^{\vee} - ab + bc + c^{\vee}) = \\ &= (a-b)(b-c)[(c^{\vee} - a^{\vee}) + b(c-a)] = \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c); \end{aligned}$$

و برای مخرج

$$\begin{aligned} a^{\vee}(c-b) + b^{\vee}(a-c) + c^{\vee}(b-a) &= \\ &= a^{\vee}c - a^{\vee}b + ab^{\vee} - b^{\vee}c - c^{\vee}(a-b) = \\ &= c(a^{\vee} - b^{\vee}) - ab(a-b) - c^{\vee}(a-b) = \\ &= (a-b)(ac + bc - ab - c^{\vee}) = \\ &= (a-b)[-a(b-c) + c(b-c)] = \\ &= (a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

درنتیجه، حاصل کسر، برابر $a + b + c$ می‌شود.

۲۴۶. ۱) روش گوس. مجموع را در دو جهت مختلف می‌نویسیم:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S_1 = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1$$

و باهم جمع می‌کنیم:

$$2S_1 = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) + (n + 1)$$

و چون تعداد جمله‌ها برابر n است:

$$2S_1 = n(n + 1) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

روش استفاده از اتحادها. این اتحاد را در نظر می‌گیریم:

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

اتحاد، به‌ازای هر مقدار دلخواه a برقرار است. به‌جای a ، به‌ترتیب، عددهای درست از ۰ تا n را قرار می‌دهیم و، بدون این‌که طرف‌های سمت راست را ساده کنیم، زیرهم می‌نویسیم:

$$a = 0 : \quad 1^2 = 1$$

$$a = 1 : \quad 2^2 = 1^2 + 2 \times 1 + 1$$

$$a = 2 : \quad 3^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 1$$

$$a = 3 : \quad 4^2 = 3^2 + 2 \times 3 + 1$$

.....

$$a = n : \quad (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

این $(n + 1)$ سطر را باهم جمع می‌کنیم. همهٔ جمله‌های ستون سمت چپ برابری‌ها، با جمله‌های مساوی خود، در نخستین ستون سمت راست برابری‌ها، حذف می‌شوند (1^2 با 1^2 در سطر بعد، 2^2 با 2^2 در سطر بعد و غیره). تنها جملهٔ $(n + 1)^2$ می‌ماند. در سمت راست، نخستین ستون حذف

شده است؛ مجموع ستون دوم برابر است با

$$\begin{aligned} 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 2n &= \\ = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) &= 2S_1 \end{aligned}$$

در آخرین ستون سمت راست، به تعداد $n + 1$ عدد برابر ۱ داریم که مجموع آنها برابر $n + 1$ می‌شود. بنابراین به دست می‌آید:

$$(n + 1)^2 = 2S_1 + n + 1$$

از این جا: $2S_1 = (n + 1)^2 - n - 1$ و یا

$$2S_1 = n^2 + n = n(n + 1) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

مثال.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 1373 &= \frac{1}{2} \times 1373(1373 + 1) = \\ &= 1373 \times 687 = 943251 \end{aligned}$$

(۲) این بار، از اتحاد

$$(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

استفاده می‌کنیم و، شبیه حالت قبل، به جای a ، عددهای درست از ۰ تا n را قرار می‌دهیم و سپس، باهم جمع می‌کنیم (خودتان، آنها را بنویسید). نتیجه مجموع، چنین می‌شود.

$$(n + 1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + n + 1$$

به جای S_1 ، مقدارش $\frac{1}{4}n(n+1)$ را می‌گذاریم

$$3S_2 = (n+1)^2 - \frac{3}{4}n(n+1) - (n+1)$$

دوطرف برابری را در ۲ ضرب می‌کنیم و، سمت راست، از $n+1$ فاکتور می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 6S_2 &= (n+1)[2(n+1)^2 - 3n - 2] = \\ &= (n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2) = \\ &= n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

و سرانجام

$$S_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

مثال. مطلوب است محاسبه مجموع

$$P = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2$$

حل. در سمت راست برابری از $2^2 = 4$ فاکتور می‌گیریم:

$$P = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = 4S_2$$

$$P = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) \text{ در نتیجه}$$

محاسبه زیرهم، برای مجموع مجذورهای عددهای فرد، روشن است:

$$\begin{aligned} Q &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2) - (2^2 + \dots + (2n)^2) = \\ &= \frac{1}{6}(2n)(2n+1)(4n+1) - \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}n(2n+1)[(2n+1) - 2(n+1)] =$$

$$= \frac{1}{3}n(2n^2 - 1)$$

(۳) در آغاز، حاصل $(a+1)^2$ را به دست می آوریم:

$$(a+1)^2 = [(a+1)^2]^1 = (a^2 + 2a + 1)^1 =$$

$$= a^2 + 2a^2 + 6a^1 + 2a + 1$$

اکنون اگر، شبیه دو حالت قبل، در دوطرف این اتحاد، به جای a ،
عددهای درست از ۰ تا n را قرار دهیم و سپس، باهم جمع کنیم، به دست
می آید:

$$(n+1)^2 = 4S_2 + 6S_1 + 4S_0 + n + 1$$

به جای S_1 و S_2 ، مقدارشان را قرار می دهیم

$$4S_2 = (n+1)^2 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$$

$$= (n+1)[(n+1)^2 - n(2n+1) - 2n - 1] =$$

$$= (n+1)(n^2 + 2n^2 + 2n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1) =$$

$$= (n+1)(n^2 + n^2) = n^2(n+1)^2$$

و سرانجام

$$S_2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2 = S_1^2$$